

Colle n°1 "Réduction"

M. Calciano

2025/2026

Questions préliminaires (Vrai/Faux)

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. Une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est diagonalisable.
2. Une matrice diagonalisable de taille n admet n valeurs propres distinctes.
3. Une matrice est diagonalisable lorsque la dimension de chaque espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre associée.
4. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
5. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable.
6. Si A^2 est diagonalisable alors A est diagonalisable.

Exercice n°1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice n°2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Calculer les puissances de $A - I_3$.
2. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_k = \ker((f - I_3)^k)$. Démontrer que $\dim(E_k) = k$.
3. En déduire une base (u_1, u_2, u_3) de E_3 telle que u_1 soit une base de E_1 et (u_2, u_3) une base de E_2 .
4. En déduire l'existence d'une matrice B triangulaire supérieure et semblable à A .

Exercice n°3

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E .

1. Déterminer les valeurs propres de f^2 en fonction de celles de f .
2. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et que f^2 est diagonalisable.
3. Démontrer la réciproque.

Exercice n°4

On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leurs premiers termes u_0 , v_0 , w_0 et par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de u_0 , v_0 , w_0 et de n .