

Colle "Intégrales généralisées"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

Soient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

- 1) Montrer que I et J convergent.
- 2) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $J = I$.
- 3) Calculer $I + J$ en effectuant le changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$.
- 4) En déduire la valeur de I .

Exercice n°2

- 1) Justifier que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est convergente.

On définit alors $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- 2) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- 3) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que vaut la limite de f en 0 ?
- 4) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) \leq C.$$

En déduire : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

- 5) Démontrer : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$.

Exercice n°3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n} dx.$$

- 1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est une intégrale convergente.
- 2) Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

- 3) Établir la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

- 4) Former un développement asymptotique de I_n à la précision $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice n°4

On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt.$$

1) Justifier que I converge.

2) a) Démontrer : $\forall t \in [0, +\infty[, \sin^3(t) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.

b) En déduire :

$$I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3\pi} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

3) Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

4) En déduire la valeur de I .

Exercice n°5

1) Justifier la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt$.

2) On admet ici la convergence de l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

3) Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

(indication : $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$).

4) Justifier la convergence de l'intégrale de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$.