

Colle "Séries"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

En utilisant la règle de d'Alembert, déterminer la nature de la série :

$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

Exercice n°2

Pour chacune des séries, justifier l'existence et effectuer le calcul de la somme :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \\ 2) \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Exercice n°3

À l'aide d'un développement asymptotique, déterminer la nature de la série de terme général :

$$\ln(1 + (-1)^n a) \quad (a > 0)$$

Exercice n°4

1) Justifier l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

2) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, soigneusement justifiée, déterminer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice n°5

Soit une série $\sum u_n$ absolument convergente.

1) Justifier qu'à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 1$.

2) En déduire que la série de terme général u_n^2 est convergente.

Exercice n°6

On note pour x réel, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, et D son domaine de définition.

- 1) Préciser D .
- 2) Soit $a > 1$. Démontrer que la série $\sum \frac{n}{n^a \ln n}$ converge.
- 3) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $x \in D$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

- 4) Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ en 1^+ .