Chapitre 14 : Applications linéaires

I. Généralités

1) Définitions

Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, une application f : E→F est dite linéaire si : $\forall (x, x') \in E^2, \forall \lambda \in \varkappa, f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$

On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.

Exemple :
Soit f : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, (x, y, z) $\longrightarrow$ (2x + z, y). f est une application linéaire.
Soit g : $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ P $\longrightarrow$ (P(0), P(1)). g est une application linéaire.

Une application linéaire de E vers K est appelée une forme linéaire.
Exemple :
Soit ϕ: C([0; 1], $\mathbb{R}$) $\longrightarrow \mathbb{R}$, f $\longrightarrow \int_0^1 f(t)dt$. ϕ est une forme linéaire.

2) Vocabulaire

Lorsque E = F, une application linéaire est appelée **endomorphisme**.
Si l'application linéaire est bijective, on parle d'**isomorphisme**
Si l'endomorphisme est bijectif, on parle **d'automorphisme.**

Exemple : la dérivation f→f ' est une application linéaire de $C^1(\mathbb{R},\varkappa)$ dans $C^0(\mathbb{R},\varkappa)$

3) Proposition

Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels
L'ensemble L(E,F) des applications linéaires de E vers F est un $\varkappa$-espaces vectoriel.
Lorsque E = F, on note plus simplement L(E) l'ensemble L(E,E) des endomorphismes de E.

4) Proposition

Soit f∈L(E,F) et g∈L(F,G) des applications linéaires,
Alors : la composée gof est une application linéaire

Démonstration : Evidente en exploitant la linéarité de f et de g

Si de plus, f est un isomorphisme de E dans F, son application réciproque est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration : Soit f^1 l'application réciproque associée à f
Alors : $f^1(\lambda y_1+y_2) = f^1(\lambda f(x_1)+f(x_2)) = f^1(f(\lambda x_1 + x_2)) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$

5) Proposition

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la composition
On l'appelle le groupe linéaire et on le note GL(E).

Démonstration : Il suffit de vérifier l'axiomatique de structure de groupe…

Exercice :
Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$, f(x, y) = (2x + 3y, x + y). Montrer que f est linéaire. Montrer que f admet une réciproque, donner son expression.

II. Images, noyaux

1) Définition

Soit f : E→F est linéaire. On définit :

-l'image de f comme le sous-ensemble de F, noté Im(f), tel que **Im(f) = {f(x), x∈ E} = {y∈ F/$\exists x \in E$,y = f(x)}**

-le noyau de f noté Ker(f) défini par **Ker(f) = { x∈ E / f(x) = 0_F}**

Exemple :

Soit f définie par f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,(x, y, z) → (−2x, y + 3z). Déterminer Ker(f) et Im(f)

2) Proposition : Soit f : E→F est linéaire

-alors l'image directe par f d'un sous-espace de E est un sous-espace de F

En particulier **Im(f) est un sous-espace vectoriel de F**

-alors l'image réciproque d'un sous-espace de F est un sous-espace de E

En particulier **Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E**

Démonstration : Montrons que Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E

D'abord : 0_E∈Ker(f) car f(0_E)=0_F

Soit x∈Ker(f), alors $\forall \lambda \in \varkappa$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0_F$

Et pour x,x' dans Ker(f), f(x+x') = f(x)+f(x') = 0_F

3) Applications injectives/surjectives

Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, une application f : E→F linéaire

-f est dite surjective si et seulement si Im(E) = F

-f est dite injective si et seulement si Ker(f) = {0_E}

Démonstration : Montrons que f est dite injective si et seulement si Ker(f) = {0_E}

Si f est injective, et f(x) = 0, comme f(0) = 0, on a f(x) = f(0) et par injectivité x = 0

Réciproquement, Ker(f) = {0_E}, soit x,x' dans E tels que f(x) = f(x') alors f(x-x') = 0

Et x-x'∈Ker(f) = {0_E} donc x-x'=0_E, et x=x'

Exemple :

On considère l'application linéaire ψ: $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ $P \longrightarrow P''$. Alors ψ est surjective mais n'est pas injective.

4) Projecteurs, symétries, homothéties

a) Définitions

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\varkappa$, f un endomorphisme de E

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire tels que E = F⊕G

On dit que **f est le projecteur** (ou la projection) sur F parallèlement à G si pour tout x de E, décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F$

On dit que **f est la symétrie** par rapport à F parallèlement à G si pour tout x de E, décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F - x_G$

On dit que **f est l'homothétie de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** (où λ est un scalaire) si pour tout x de E, on a $f(x) = \lambda x$

b) Caractérisations des projecteurs
Soit f un endomorphisme de E, alors :
f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$

Remarque : f est alors le projecteur sur Im(f) parallèlement à Ker(f)
Remarque : On a alors : Im(f) = Ker(f-Id_E)

Démonstration : Montrons que f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$
Si f projecteur, alors pour tout x de E, décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F$
Et $f^2(x) = f(x_F) = x_F$ donc $f^2(x) = f(x)$
Réciproquement, si pour tout x de E, $f^2(x) = f(x)$
Alors $f(f(x)-x) = 0$, donc $f(x)-x \in Ker(f)$
Ainsi : $x = x-f(x) + f(x)$ avec $x-f(x)$ dans Ker(f) et f(x) dans Im(f)

c) Caractérisation des symétries
Soit f un endomorphisme de E, alors **f est une symétrie si et seulement si $f^2 = Id_E$**

Remarque : f est alors la symétrie par rapport à Ker(f-Id_E) parallèlement à Ker(f + Id_E)

III. Cas de la dimension finie

1) Théorème dit de construction d'application linéaire
Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.
On note B = (e_1,…,e_p) une base de E.
Alors pour tous vecteurs y_1,…,y_p de F, il existe une application linéaire de E dans F telle que :
$\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(e_i) = y_i$

2) Proposition
Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.
On note B = (e_1,…,e_p) une base de E.
Soit f : E→F linéaire
On note L = ($f(e_1)$,…,$f(e_p)$) l'image de B par f.
-alors f est injective si et seulement si L est libre.

-alors f est surjective si et seulement si L est génératrice de F

-alors f est un isomorphisme si et seulement si L est une base de F

Démonstration : Montrons que f est injective si et seulement si L est libre.
Si f est injective
Soit λ_1,…λ_p p scalaires de $\varkappa$ tels que : $\lambda_1 f(e_1)+\dots+\lambda_p f(e_p) = 0$
Alors $f(\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_p e_p) = 0$, or f injective donc $\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_p e_p = 0$ or (e_1,…,e_p) une base de E, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
Réciproquement
Si L libre, $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_p e_p) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 f(e_1)+\dots+\lambda_p f(e_p) = 0$ d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et x=0

3) Rang d'une application linéaire
Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.
Soit f : E→F linéaire

Alors, Im(f) est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie (même si F n'est pas de dimension finie), on appelle rang d'une application linéaire f, la dimension de l'espace Im(f). On note rg(f) = dim(Im(f))

Démonstration: Si (e_1...e_n) est une base de E, alors (f(e_1),...f(e_n)) est une famille génératrice de Im(f) (avec la proposition 4 qui suit...)
On peut en extraire une base, et dim(Im(f)) est donc finie

Exemple :
Soit f : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (x, y, z) $\longrightarrow$ (x + z, x + y, 2x + y + z). Alors rg(f) = 2.

4) Proposition
Soit f : E→F linéaire avec E de dimension finie
Alors pour toute famille génératrice $(e_i)_{i\in I}$ de E, la famille (f(e_i))$_{i\in I}$ est génératrice de l'espace vectoriel Im(f).

Soit y∈Im(f) alors $\exists x \in E$, y=f(x), or x$\in E$, donc x = λ_1e$_1$+...+ $\lambda_p e_p$
Et f(x) = λ_1f(e$_1$)+...+ $\lambda_p f(e_p)$...

5) Théorème du rang
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f : E→F linéaire, alors : dimE = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))

Démonstration :
Comme E est de dimension finie, on peut considérer S supplémentaire de Ker(f) dans E.
On montre que Im(f) et S sont isomorphes, ils ont donc même dimension
Comme dim(E) = dim(Ker(f))+dim(S) = dim(Ker(f))+dim(Im(f))
Exemple:
Soient n ∈ $\mathbb{N}^*$et f : $\mathbb{R}_n$[X] $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ P $\longrightarrow$ (P(0), P(1)) .
Alors dim(Ker(f)) = n − 1 et rg(f) = 2.

6) Caractérisation des isomorphismes en dimension finie
Soient E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels de dimension finie, f : E→F linéaire,
-alors si f est un isomorphisme, alors dimE = dimF

-alors si dim E = dim F, on a : f est bijective⟺ f est injective⟺f est surjective

Démonstration il suffit de prendre une base (e_1...e_n) et démontrer que (f(e_1),...f(e_n)) est une famille libre et génératrice de F

7) Définition
Le noyau d'une forme linéaire non nulle f ∈ L (E, IK) sur un K-ev E de dimension n ∈ $\mathbb{N}^*$est un sev de dimension n − 1, et est appelé un hyperplan.