

Colle "Suites de fonctions"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

- 1) Démontrer que la convergence uniforme d'une suite de fonctions permet d'intervertir les symboles de limite et d'intégration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

- 2) Démontrer que le caractère continu d'une suite de fonctions est transmis par la convergence uniforme à la fonction limite.

Exercice n°2

- 1) Soit $0 < a < 1$. Étudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$ sur $I = [0, 1]$ et sur $J = [0, a]$.

- 2) Soit $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$ Étudier la convergence simple et uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$.

Problème

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) & \text{si } 0 < t \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .
2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt.$$

3) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + y + o(1)$.

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -y.$$

Indication : procéder au changement de variable $x = 1 - \frac{1}{n}$, puis faire une intégration par parties.