

Colle "Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$. On note p_F la projection orthogonale sur F .

- 1) Qu'appelle-t-on distance de x à F ? (donner la définition, pas la caractérisation).
- 2) Démontrer : $\forall x \in E, \forall y \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$.
- 3) Démontrer : $\forall x \in E, d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Exercice n°2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. On pose, pour $(f, g) \in E \times E$,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) t^2 dt.$$

- 1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- 2) Calculer $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Soit $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$ (on prolonge u par continuité en 0 en posant $u(0) = 0$). Déterminer le projeté orthogonal de u sur F .
- 4) Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln(t))^2 t^2 dt$.

Exercice n°3

Soit E un espace euclidien et soit p un projecteur de E .

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) p est un projecteur orthogonal ;
- (ii) $\forall (x, y) \in E \times E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$;
- (iii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Indication : pour démontrer (iii) $\Rightarrow$ (i), on pourra travailler par l'absurde.

Exercice n°4

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

- 1) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- 2) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
- 3) Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
- 4) Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
 - a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E . Quelle est sa dimension ?
 - b) Soit φ la projection orthogonale sur H . Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.