

Colle "Calcul différentiel (partie 2)"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

- 1) Montrer que l'application $f : x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- 2) Calculer son gradient.

Exercice n°2

- 1) Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (x^2 - z^2, \sin x \sin y).$$

- a) Montrer que f est différentiable.
 - b) Déterminer la matrice jacobienne de f .
- 2) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 . On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(u, v) = g(uv, u^2 + v^2).$$

- a) Démontrer que h est C^1 .
 - b) Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction de celles de g .

Exercice n°3

- 1)
 - a) Justifier que $] -\infty; 0]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
 - b) Soit l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2$. Justifier que g admet un maximum sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 8\}.$$

- 2) Soit l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
 - a) Justifier que g n'admet qu'un seul point critique.
 - b) Démontrer que g admet un extremum local en ce point.

Exercice n°4

- 1) Montrer que l'application

$$\varphi : (x, y) \mapsto (x, xy)$$

définit une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (que l'on précisera).

- 2) Montrer que φ est C^1 .

- 3) Montrer que φ^{-1} est C^1 .

- 4) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice n°5

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Démontrer que $\text{Im } f$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.