

Colle "Probabilités"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

Les deux questions sont indépendantes.

- 1) On considère un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. La probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.
 - a) Déterminer la loi de X .
 - b) Calculer son espérance.
 - c) Déterminer l'espérance de $\frac{1}{X}$.
- 2) a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

- b) On lance un dé cubique « parfait ». Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

Exercice n°2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $0 < a < b$).

- 1) Donner la fonction de répartition de $Y = X^2$.
- 2) Donner la densité de Y .
- 3) Donner $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice n°3

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 définies par :

- X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne,
- X_2 le temps entre la deuxième panne et la première panne,
- X_3 le temps entre la troisième panne et la deuxième.

Les variables X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

- 1) Quelle est la durée moyenne entre deux pannes consécutives ?
- 2) Soit E l'événement : « Chacune des 3 périodes de fonctionnement dure plus de deux heures ». Calculer $\mathbb{P}(E)$.
- 3) Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 périodes de fonctionnement sans interruption.
 - a) $\forall t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$.
 - b) Déterminer une densité de Y .
 - c) Pour $a < 0$, calculer $\int_0^{+\infty} te^{at} dt$.
 - d) Démontrer que Y possède une espérance.
 - e) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice n°4

Un vol Toulouse-Paris est assuré par un avion de $N = 150$ places.

Pour un vol de ce type, des estimations ont montré que la probabilité qu'une personne confirme son billet est $p = 0,75$.

La compagnie vend n billets avec $n > 150$.

Soit X la variable aléatoire « nombre de personnes parmi les n possibles ayant confirmé leur réservation pour ce vol ».

- 1) Quelle est la loi suivie par X ?
- 2) Déterminer n pour que $\mathbb{P}(X > 150) \leq 0,05$.

Exercice n°5

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

- 1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
- 2) Déterminer une densité de X .
- 3) Reconnaître la loi de la variable $Y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
- 4) Y admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.