

Colle "Espaces vectoriels normés"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

- 1) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1 f est continue sur E ;

P2 f est continue en 0_E ;

P3 $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

- 2) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On considère l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice n°2

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

- 1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
- 2) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
- a) Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
- b) Démontrer : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1}$ converge.
- c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1}$. Démontrer que f est continue sur E .

Exercice n°3

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E .

- 1) On suppose $A \subset B$.
 - a) Démontrer : $\overline{A} \subset \overline{B}$.
 - b) Démontrer : $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
- 2)
 - a) Démontrer : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - b) (La question semble incomplète dans le texte original)

Exercice n°4

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. Le but de l'exercice est de démontrer que Φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

- 1) **Préambule.** On considère F un fermé de E .
 - a) Soit $y \in E$. Démontrer que $y + F = \{y + x \mid x \in F\}$ est un fermé de E .
 - b) Soit $u \notin F$. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(u, r) \cap F = \emptyset$ (où $\overline{B}(u, r)$ désigne la boule fermée de centre u et rayon r).
- 2) Démontrer le sens direct (si Φ est continue alors $\ker \Phi$ est fermé).
- 3) **Réciproque.** On suppose que le noyau de Φ , noté H , est fermé. On fixe $y \in E$ tel que $\Phi(y) = 1$.
 - a) Démontrer que $\Phi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
 - b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0_E, r) \cap \Phi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
 - c) Démontrer : $x \in \overline{B}(0, r) \Rightarrow |\Phi(x)| \leq 1$.
 - d) Conclure (indication : pour $x \in E$, considérer un vecteur convenable).