

Colle "Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien"

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1

(L'énoncé original ne définit pas la matrice A . On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille n .)

- 1) Montrer que A est diagonalisable de 4 façons différentes : sans calcul, avec ses éléments propres, avec le théorème du rang, en calculant A^2 .
- 2) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base orthonormale d'un espace euclidien E .
 - a) Que dire de u ?
 - b) Donner une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice n°2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

- 1)
 - a) Pour tout $x \in E$, rappeler l'expression de x dans la base $\mathcal{B}$.
 - b) Déterminer $\text{tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.
- 2) On suppose f et g sont des endomorphismes auto-adjoints positifs. Montrer que $\text{tr}(f \circ g) \geq 0$.

Exercice n°3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On suppose que E est de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit p un projecteur de E de rang égal à 1. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, et p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^t A$.

- 1) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.
- 2) Calculer $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2$.
- 3)
 - a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p^*(y) \rangle$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(p^* \circ p) = \text{Ker}(p)$.
 - c) On suppose $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = 1$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice n°4

- 1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
- 2) Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq p-1$ tel que $P(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ pour tout $1 \leq i \leq p$.
- 3) Montrer que $P(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $P(M)^2 = M$.