

Colle n°1 "Réduction" - Corrigé détaillé

M. Calciano

2025/2026

Rappels de cours essentiels

- **Polynôme caractéristique** : $P_A(X) = \det(A - XI_n)$. Ses racines (dans $\mathbb{C}$) sont les valeurs propres de A .
- **Diagonalisabilité** : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n . Cela équivaut à :
 1. Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
 2. Pour chaque valeur propre λ , la multiplicité algébrique $m_a(\lambda)$ est égale à la multiplicité géométrique $\dim(\ker(A - \lambda I_n))$.
- **Vecteurs propres** : Un vecteur $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Il y a une infinité de vecteurs propres (tous les multiples non nuls d'un vecteur propre donné).
- **Théorème de Cayley-Hamilton** : Toute matrice annule son polynôme caractéristique.
- **Suites récurrentes linéaires** : Pour résoudre un système de la forme $X_{n+1} = AX_n$, on a $X_n = A^n X_0$. Si A est diagonalisable, $A^n = PD^nP^{-1}$.

1 Questions préliminaires (Vrai/Faux)

1. **Faux.** Une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé n'est pas nécessairement diagonalisable. Il faut en plus que pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique soit égale à la multiplicité géométrique. *Contre-exemple* : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X - 1)^2$ (scindé) mais n'est pas diagonalisable.
2. **Faux.** Une matrice diagonalisable de taille n admet au plus n valeurs propres distinctes. Elle peut en avoir moins (ex : I_n a une seule valeur propre 1 de multiplicité n).
3. **Vrai.** C'est la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité. La dimension de l'espace propre associé à λ est sa multiplicité géométrique, qui doit être égale à sa multiplicité algébrique.
4. **Faux.** En dimension finie (supérieure à 1), un endomorphisme admet une infinité de vecteurs propres. Si x est un vecteur propre, alors pour tout $k \in \mathbb{K}^*$, kx est aussi un vecteur propre pour la même valeur propre.
5. **Vrai.** Si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Alors $A^2 = PD^2P^{-1}$, et D^2 est une matrice diagonale. Donc A^2 est diagonalisable.
6. **Faux.** La réciproque est fausse. *Contre-exemple* : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = 0$ qui est diagonalisable, mais A ne l'est pas (son polynôme caractéristique est X^2 , valeur propre 0 de multiplicité 2, mais $\dim(\ker A) = 1 \neq 2$).

2 Exercice n°1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Détermination des éléments propres

On calcule le polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - XI_3)$.

$$A - XI_3 = \begin{pmatrix} -X & 1 & 2 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 0 & -1-X \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant en utilisant par exemple la troisième ligne :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1-X & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1-X) \cdot \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 2(1-X)) + (-1-X)((-X)(1-X) - 1 \cdot 1) \\ &= (1 - 2 + 2X) + (-1-X)(-X + X^2 - 1) \\ &= (2X - 1) + (-1-X)(X^2 - X - 1). \end{aligned}$$

Calculons le second terme : $(-1-X)(X^2 - X - 1) = -(1+X)(X^2 - X - 1)$.

$$(1+X)(X^2 - X - 1) = X^3 - X^2 - X + X^2 - X - 1 = X^3 - 2X - 1.$$

Donc le second terme est $-X^3 + 2X + 1$.

Ainsi,

$$P_A(X) = (2X - 1) + (-X^3 + 2X + 1) = -X^3 + 4X.$$

On factorise : $P_A(X) = -X(X^2 - 4) = -X(X - 2)(X + 2)$.

Les valeurs propres sont donc : $\boxed{0, 2, -2}$. Elles sont toutes distinctes, donc A est diagonalisable (car une matrice 3×3 avec 3 valeurs propres distinctes est diagonalisable).

Vecteur propre pour $\lambda_1 = 0$: On résout $(A - 0I_3)X = 0 \iff AX = 0$.

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

De la troisième, $x = z$. La première donne $y = -2z$. La deuxième est alors $z - 2z + z = 0$, vérifiée. Donc $X = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Un vecteur propre est $e_0 = (1, -2, 1)$.

Vecteur propre pour $\lambda_2 = 2$: On résout $(A - 2I_3)X = 0$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Système :

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

La troisième donne $x = 3z$. La deuxième donne $3z - y + z = 0 \Rightarrow y = 4z$. La première est vérifiée : $-6z + 4z + 2z = 0$. Donc $X = (3z, 4z, z) = z(3, 4, 1)$. Un vecteur propre est $e_2 = (3, 4, 1)$.

Vecteur propre pour $\lambda_3 = -2$: On résout $(A + 2I_3)X = 0$.

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

La troisième donne $x = -z$. La première donne $2(-z) + y + 2z = y = 0$. La deuxième donne $-z + 0 + z = 0$, vérifiée. Donc $X = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$. Un vecteur propre est $e_{-2} = (-1, 0, 1)$.

2. Diagonalisation de A

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, avec $A = PDP^{-1}$.

Calculons P^{-1} . On résout $PX = Y$ ou on utilise la comatrice. Procédons par résolution de système.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $PP^{-1} = I_3$.

On résout les trois systèmes $PX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $PX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $PX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour X_1 :

$$\begin{cases} a + 3d - g = 1 \\ -2a + 4d = 0 \\ a + d + g = 0 \end{cases}$$

De $-2a + 4d = 0 \Rightarrow a = 2d$. On reporte : $2d + 3d - g = 1 \Rightarrow 5d - g = 1 \Rightarrow g = 5d - 1$. Puis $a + d + g = 0 \Rightarrow 2d + d + 5d - 1 = 0 \Rightarrow 8d = 1 \Rightarrow d = 1/8$. Alors $a = 1/4$, et $g = 5/8 - 1 = -3/8$.

Pour X_2 :

$$\begin{cases} b + 3e - h = 0 \\ -2b + 4e = 1 \\ b + e + h = 0 \end{cases}$$

De $-2b + 4e = 1 \Rightarrow b = 2e - 1/2$. On reporte : $(2e - 1/2) + 3e - h = 0 \Rightarrow 5e - h = 1/2 \Rightarrow h = 5e - 1/2$. Puis $b + e + h = 0 \Rightarrow (2e - 1/2) + e + (5e - 1/2) = 0 \Rightarrow 8e - 1 = 0 \Rightarrow e = 1/8$. Alors $b = 1/4 - 1/2 = -1/4$, et $h = 5/8 - 1/2 = 1/8$.

Pour X_3 :

$$\begin{cases} c + 3f - i = 0 \\ -2c + 4f = 0 \\ c + f + i = 1 \end{cases}$$

De $-2c + 4f = 0 \Rightarrow c = 2f$. On reporte : $2f + 3f - i = 0 \Rightarrow i = 5f$. Puis $c + f + i = 1 \Rightarrow 2f + f + 5f = 1 \Rightarrow 8f = 1 \Rightarrow f = 1/8$. Alors $c = 1/4$, et $i = 5/8$.

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3 Exercice n°2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Calcul des puissances de $A - I_3$

On pose $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculons N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Terme $(1, 1)$: $(-4)(-4) + (-2)(6) + 0 = 16 - 12 = 4$.

$(1, 2)$: $(-4)(-2) + (-2)(2) + 0 = 8 - 4 = 4$.

$(1, 3)$: $(-4)(0) + (-2)(1) + 0 = -2$.

$(2, 1)$: $6(-4) + 2(6) + 1(4) = -24 + 12 + 4 = -8$.

$(2, 2)$: $6(-2) + 2(2) + 1(0) = -12 + 4 = -8$.

$(2, 3)$: $6(0) + 2(1) + 1(2) = 4$.

$(3, 1)$: $4(-4) + 0(6) + 2(4) = -16 + 8 = -8$.

$(3, 2)$: $4(-2) + 0(2) + 2(0) = -8$.

$(3, 3)$: $4(0) + 0(1) + 2(2) = 4$.

Donc $N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculons $N^3 = N^2 \cdot N$:

$$N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1, 1)$: $4(-4) + 4(6) + (-2)(4) = -16 + 24 - 8 = 0$.

$(1, 2)$: $4(-2) + 4(2) + (-2)(0) = -8 + 8 = 0$.

$(1, 3)$: $4(0) + 4(1) + (-2)(2) = 0 + 4 - 4 = 0$.

Les autres lignes sont des multiples de la première (coefficient -2), donc tous les termes sont nuls.

Ainsi, $\boxed{N^3 = 0}$ (N est nilpotente d'indice 3).

2. Dimensions des noyaux de $(f - I_3)^k$

On a $E_k = \ker(N^k)$ où $N = f - I_3$. On sait que $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$.

— $E_1 = \ker N$. Par le théorème du rang, $\dim(E_1) = 3 - \text{rg}(N)$. On calcule le rang de N : ses colonnes sont $C_1 = (-4, 6, 4)$, $C_2 = (-2, 2, 0)$, $C_3 = (0, 1, 2)$. C_2 et C_3 sont clairement indépendantes. C_1 n'est pas combinaison de C_2 et C_3 (vérification rapide). Donc $\text{rg}(N) = 2$. Ainsi $\dim(E_1) = 1$.

— $E_2 = \ker(N^2)$. $\text{rg}(N^2)$: les colonnes de N^2 sont $(4, -8, -8)$, $(4, -8, -8)$, $(-2, 4, 4)$. La première et la deuxième sont égales, la troisième est $-\frac{1}{2}$ fois la première. Donc $\text{rg}(N^2) = 1$. Ainsi $\dim(E_2) = 3 - 1 = 2$.

— $E_3 = \ker(N^3) = \ker(0) = \mathbb{R}^3$. Donc $\dim(E_3) = 3$.

On a bien $\dim(E_k) = k$ pour $k = 1, 2, 3$.

3. Base de E_3 adaptée

On cherche (u_1, u_2, u_3) tels que u_1 soit une base de E_1 , et (u_2, u_3) une base de E_2 .

On a une chaîne de noyaux : $\{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 = \mathbb{R}^3$.

On construit la base par la méthode usuelle pour les endomorphismes nilpotents. Puisque $N^2 \neq 0$, il existe un vecteur u_3 tel que $N^2 u_3 \neq 0$. On pose alors $u_2 = Nu_3$ et $u_1 = N^2 u_3$. On a $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$, et la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Cherchons u_3 tel que $N^2 u_3 \neq 0$. Par exemple, $u_3 = (1, 0, 0)$. On a $N^2 u_3$ est la première colonne de N^2 : $(4, -8, -8)$. Donc $u_1 = (4, -8, -8)$.

$u_2 = Nu_3 =$ première colonne de N : $(-4, 6, 4)$.

Donc une base de E_3 est $\boxed{(u_1, u_2, u_3) = ((4, -8, -8), (-4, 6, 4), (1, 0, 0))}$.

4. Matrice triangulaire supérieure semblable à A

Dans la base (u_1, u_2, u_3) , on a $f(u_1) = u_1$ car $u_1 \in E_1 = \ker(f - I_3)$. Donc $f(u_1) = 1 \cdot u_1$.

Pour u_2 , on a $u_2 = Nu_3$, donc $(f - I_3)u_2 = Nu_2 = N^2 u_3 = u_1$. Ainsi $f(u_2) = u_2 + u_1$.

Pour u_3 , $Nu_3 = u_2$, donc $f(u_3) = u_3 + u_2$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice B est triangulaire supérieure et est semblable à A .

4 Exercice n°3

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E .

1. Valeurs propres de f^2

Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$. Donc λ^2 est valeur propre de f^2 .

Réciproquement, soit μ une valeur propre de f^2 . Alors il existe $x \neq 0$ tel que $f^2(x) = \mu x$. On peut factoriser $\mu = \lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On a $f^2(x) - \lambda^2 x = 0$, soit $(f - \lambda I)(f + \lambda I)(x) = 0$. Si $(f + \lambda I)(x) = 0$, alors x est un vecteur propre de f pour $-\lambda$, donc $\mu = \lambda^2$ est bien le carré d'une valeur propre de f . Sinon, $y = (f + \lambda I)(x) \neq 0$ et $(f - \lambda I)(y) = 0$, donc y est vecteur propre de f pour λ , et $\mu = \lambda^2$ est toujours le carré d'une valeur propre de f .

Ainsi, les valeurs propres de f^2 sont exactement les carrés des valeurs propres de f : $\boxed{\text{Sp}(f^2) = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \text{Sp}(f)\}}$.

2. f diagonalisable

On suppose f diagonalisable. Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

Égalité $\ker(f) = \ker(f^2)$: On a toujours $\ker(f) \subseteq \ker(f^2)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(f^2)$. On décompose $x = \sum_\lambda x_\lambda$ avec $x_\lambda \in E_\lambda(f)$. Alors $f^2(x) = \sum_\lambda \lambda^2 x_\lambda = 0$. Comme les x_λ sont dans des sous-espaces distincts, ils sont linéairement indépendants, donc $\lambda^2 x_\lambda = 0$ pour tout λ . Si $\lambda \neq 0$, $\lambda^2 \neq 0$, donc $x_\lambda = 0$. Ainsi $x = x_0 \in \ker(f)$. Donc $\ker(f^2) \subseteq \ker(f)$.

Diagonalisabilité de f^2 : Si f est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres (e_i) pour f . Chaque e_i est aussi vecteur propre de f^2 (pour la valeur propre λ_i^2). Donc la base (e_i) diagonalise f^2 . Ainsi f^2 est diagonalisable.

3. Réciproque

On suppose que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et que f^2 est diagonalisable.

Montrons que f est diagonalisable. Soit $\mu \in \text{Sp}(f^2)$. On peut écrire $\mu = \lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $E_\mu(f^2) = \ker(f^2 - \mu I)$. On a la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(f^2)} E_\mu(f^2).$$

Pour chaque μ , on a $E_\mu(f^2) = \ker(f^2 - \mu I) = \ker((f - \lambda I)(f + \lambda I))$. On peut montrer que $E_\mu(f^2) = E_\lambda(f) \oplus E_{-\lambda}(f)$, où ces espaces sont les sous-espaces propres de f (quand ils sont définis).

En effet, soit $x \in E_\mu(f^2)$. On a $(f - \lambda I)(f + \lambda I)(x) = 0$. On peut décomposer x en utilisant le fait que $E = \ker(f - \lambda I) \oplus \ker(f + \lambda I) \oplus F$ où F est un supplémentaire. Mais il est plus simple d'utiliser le polynôme minimal : f^2 diagonalisable signifie que son polynôme minimal est scindé à racines simples : $\mu_{f^2}(X) = \prod_{\mu \in \text{Sp}(f^2)} (X - \mu)$.

On a $\mu_f(X) \mid \mu_{f^2}(X^2)$ car f annule $\mu_{f^2}(f^2)$. Comme μ_{f^2} est scindé à racines simples, $\mu_{f^2}(X^2)$ est scindé à racines simples (car les racines de $\mu_{f^2}(X^2)$ sont les λ tels que $\lambda^2 = \mu$; si $\mu \neq 0$, on a deux racines distinctes λ et $-\lambda$; si $\mu = 0$, on a une racine double 0).

Il faut alors utiliser l'hypothèse $\ker(f) = \ker(f^2)$ qui assure que la racine 0 n'est pas double dans μ_f . En effet, si 0 était une racine double de μ_f , alors on aurait $\mu_f(X) = X^2 Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$, ce qui impliquerait $f^2 Q(f) = 0$, donc $\ker(f) \subsetneq \ker(f^2)$ (car il existerait x tel que $f(x) \neq 0$ mais $f^2(x) = 0$). L'égalité des noyaux empêche cela.

Ainsi μ_f est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.

5 Exercice n°4

Soit le système :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonale par blocs : $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 5 \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = (3, 6)$.

Diagonalisation de B

$$P_B(X) = \det(B - XI_2) = \begin{vmatrix} -4-X & -6 \\ 3 & 5-X \end{vmatrix} = (-4-X)(5-X) - (-6)(3) = (X+4)(X-5) + 18 = X^2 - X - 20 + 18 = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1).$$

Valeurs propres de B : 2 et -1.

Vecteur propre pour $\lambda = 2$: $(B - 2I_2) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. On a $-6x - 6y = 0 \Rightarrow x = -y$. Donc $v_2 = (1, -1)$.

Vecteur propre pour $\lambda = -1$: $(B + I_2) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. On a $-3x - 6y = 0 \Rightarrow x = -2y$. Donc $v_{-1} = (2, -1)$.

Ainsi $B = P_B D_B P_B^{-1}$ avec $P_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On calcule $P_B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $B^n = P_B \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P_B^{-1}$.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2(-1)^n \\ -2^n & -(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve :

$$B^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Puissance de A

On a $A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ C_n & 5^n \end{pmatrix}$ où C_n est une matrice ligne. On a $C_0 = 0$ et $C_{n+1} = C_n B + (3, 6)5^n$ (car $A^{n+1} = A^n A$).

On cherche $C_n = (c_n, d_n)$ telle que

$$(c_{n+1}, d_{n+1}) = (c_n, d_n) \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + (3, 6)5^n.$$

Donc

$$\begin{cases} c_{n+1} = -4c_n + 3d_n + 3 \cdot 5^n \\ d_{n+1} = -6c_n + 5d_n + 6 \cdot 5^n \end{cases}$$

avec $c_0 = d_0 = 0$.

On peut chercher une solution particulière de la forme $(c_n, d_n) = (\alpha, \beta)5^n$. On reporte :

$$(\alpha, \beta)5^{n+1} = (\alpha, \beta)5^n B + (3, 6)5^n.$$

On simplifie par 5^n :

$$5(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)B + (3, 6).$$

Soit

$$\begin{cases} 5\alpha = -4\alpha + 3\beta + 3 \\ 5\beta = -6\alpha + 5\beta + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha - 3\beta = 3 \\ 6\alpha = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \quad 9 - 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 2.$$

Donc une solution particulière est $(c_n, d_n) = (1, 2)5^n$.

La solution générale est donc $(c_n, d_n) = (1, 2)5^n + (\lambda, \mu)B^n$ (car le noyau de l'application linéaire $Y \mapsto YB$ est les solutions de l'équation homogène, qui sont de la forme $(\lambda, \mu)B^n$).

On détermine (λ, μ) avec $c_0 = d_0 = 0$:

$$0 = (1, 2) + (\lambda, \mu) \Rightarrow (\lambda, \mu) = (-1, -2).$$

Ainsi,

$$(c_n, d_n) = (1, 2)5^n - (1, 2)B^n = (1, 2)(5^n I_2 - B^n).$$

$$\text{Donc } C_n = (1, 2)(5^n I_2 - B^n).$$

Expressions de u_n, v_n, w_n

$$\text{On a } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

et

$$w_n = C_n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + 5^n w_0 = (1, 2)(5^n I_2 - B^n) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + 5^n w_0.$$

$$\text{On a } B^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} u_n &= (-2^n + 2(-1)^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2(-1)^n)v_0. \\ v_n &= (2^n - (-1)^n)u_0 + (2^{n+1} - (-1)^n)v_0. \end{aligned}$$

Pour w_n :

$$(1, 2)(5^n I_2 - B^n) = (1, 2) \begin{pmatrix} 5^n + 2^n - 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 5^n - 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On calcule les deux composantes : Première composante : $(5^n + 2^n - 2(-1)^n) + 2(-2^n + (-1)^n) = 5^n + 2^n - 2(-1)^n - 2^{n+1} + 2(-1)^n = 5^n - 2^n$.

Deuxième composante : $(2^{n+1} - 2(-1)^n) + 2(5^n - 2^{n+1} + (-1)^n) = 2^{n+1} - 2(-1)^n + 2 \cdot 5^n - 2^{n+2} + 2(-1)^n = 2 \cdot 5^n - 2^{n+1}$.

$$\text{Donc } (1, 2)(5^n I_2 - B^n) = (5^n - 2^n, 2 \cdot 5^n - 2^{n+1}).$$

Ainsi,

$$w_n = (5^n - 2^n)u_0 + (2 \cdot 5^n - 2^{n+1})v_0 + 5^n w_0.$$

Résumé final :

$$\begin{aligned}u_n &= (-2^n + 2(-1)^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2(-1)^n)v_0, \\v_n &= (2^n - (-1)^n)u_0 + (2^{n+1} - (-1)^n)v_0, \\w_n &= (5^n - 2^n)u_0 + (2 \cdot 5^n - 2^{n+1})v_0 + 5^n w_0.\end{aligned}$$