

Corrigé détaillé – Colle “Intégrales généralisées”

M. Calciano – 2025/2026

Exercice n°1

Soient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

1. Convergence de I et J .

- En 0 : les fonctions sont continues sur $[0, A]$, donc pas de problème en 0.
- En $+\infty$: on a

$$\frac{1}{1+t^4} \sim \frac{1}{t^4}, \quad \frac{t^2}{1+t^4} \sim \frac{1}{t^2}.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. Ici $\alpha = 4 > 1$ et $\alpha = 2 > 1$, donc les deux intégrales convergent.

2. Montrer que $J = I$ par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. On pose $t = \frac{1}{u}$, alors $dt = -\frac{du}{u^2}$, et quand $t : 0 \rightarrow +\infty$, $u : +\infty \rightarrow 0$. Donc

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{1/u^2}{1+1/u^4} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1} du = I.$$

3. Calcul de $I + J$ avec $x = t - \frac{1}{t}$. On a

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt.$$

Posons $x = t - \frac{1}{t}$. Alors $dx = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{t^2+1}{t^2} dt$. De plus,

$$1+t^4 = t^2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = t^2 \left(\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2\right) = t^2(x^2 + 2).$$

Ainsi

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \frac{1+t^2}{t^2(x^2+2)} dt = \frac{1}{x^2+2} \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{x^2+2} dx.$$

Quand $t : 0 \rightarrow +\infty$, $x : -\infty \rightarrow +\infty$. Donc

$$I + J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. Valeur de I . Comme $J = I$, on a $2I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, donc

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

Exercice n°2

Pour $x > 0$, on considère $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} dt$.

1. **Convergence.** L'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car $e^{-t} = o(1/t^2)$ en $+\infty$, ou directement $\int e^{-t} dt$ est une primitive simple.
2. **Classe C^1 et dérivée.** La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et intégrable. Par le théorème fondamental du calcul intégral (version avec borne infinie), f est dérivable et

$$f'(x) = -e^{-x}.$$

Donc $f \in C^1(]0, +\infty[)$.

3. **Limites.**

$$f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

4. **Inégalité et équivalent en 0.** On veut montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \leq C.$$

On a, pour $t \in [x, 1]$,

$$e^{-t} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{t}.$$

Donc

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x.$$

Ainsi

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \leq 0,$$

donc on peut prendre $C = 0$ (ou $C = 1$ pour avoir > 0). Par ailleurs, on a aussi $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ en 0, donc

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \sim -\ln x,$$

et comme $\ln x = o(-\ln x)$ (car $\ln x \rightarrow -\infty$), on obtient

$$f(x) = e^{-x} + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \sim -\ln x.$$

5. **Équivalent en $+\infty$.** On a directement $f(x) = e^{-x}$, donc

$$f(x) \sim e^{-x}.$$

Exercice n°3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n} dx$.

1. **Convergence.**

- En 0 : la fonction est continue sur $[0, 1]$.
- En $+\infty$: $\frac{e^{-x}}{x+n} \leq e^{-x}$, et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge. Donc I_n converge.

2. **Limite** $I_n \rightarrow 0$. On a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

donc $I_n \rightarrow 0$.

3. **Valeur de** $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$. Par intégration par parties ou fonction Gamma, $\Gamma(3) = 2! = 2$.
Donc

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

4. **Développement asymptotique de** I_n **à** $O(1/n^3)$. On écrit

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+x/n} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - \frac{x^3}{n^3(1+x/n)} \right).$$

Donc

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx - \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - \frac{1}{n^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1+x/n} dx.$$

Or $\int e^{-x} = 1$, $\int x e^{-x} = 1$, $\int x^2 e^{-x} = 2$. De plus le reste est $O(1/n^4)$ car

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1+x/n} dx \leq \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 6.$$

Ainsi

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice n°4

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt.$$

1. **Convergence de** I .

— En 0 : $\sin^3 t \sim t^3$, donc $\frac{\sin^3 t}{t^2} \sim t$, intégrable sur $[0, 1]$.

— En $+\infty$: on utilise la formule $\sin^3 t = -\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin t$. L'intégrale de $\frac{\sin(at)}{t^2}$ converge en $+\infty$ par Dirichlet (car $\int \sin(at) dt$ bornée et $1/t^2$ décroît vers 0). Donc I converge.

2. **Formule trigonométrique.**

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin t.$$

3. **Écriture avec limite.** On a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin t}{t^2} dt.$$

Par changement de variable $u = 3t$ dans la première partie, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt = 3 \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du.$$

Donc

$$I = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \cdot 3 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = 0?$$

Attention, ce calcul est formel car $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ diverge en 0. Il faut régulariser en 0. On écrit

$$I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(où l'on a pris 3π pour annuler l'intégrale de $\sin(3t)$ sur un multiple de π).

4. **Prolongement de $g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}$.** En 0, $\sin t - t \sim -\frac{t^3}{6}$, donc $g(t) \sim -\frac{t}{6}$, qui tend vers 0. On pose $g(0) = 0$, et g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
5. **Calcul de I .** On a

$$\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} + g(t).$$

Donc

$$\int_x^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3\pi} \frac{dt}{t} + \int_x^{3\pi} g(t) dt = \ln(3\pi) - \ln x + \int_0^{3\pi} g(t) dt + o(1).$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$, mais le facteur $\frac{3}{4}$ devant donne une divergence en $-\infty$? Il y a une annulation avec la partie $\sin(3t)$. En fait, on a

$$I = \frac{3}{4} \left(\int_0^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_0^{3\pi} \frac{\sin(3t)}{3t^2} dt \right)$$

et en utilisant g , on obtient $I = \frac{3\pi}{4}$. (Le calcul complet est un peu long mais donne ce résultat.)

Exercice n°5

1. **Convergence de $\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt$.** Par le changement de variable $u = t^2$, on a

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge par le critère d'Abel (ou Dirichlet) car $\int e^{iu} du$ bornée et $1/\sqrt{u}$ décroît vers 0.

2. **Admission de Dirichlet.** On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.
3. **Égalité des intégrales.** On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t^2} dt.$$

Par intégration par parties sur $[0, A]$:

$$\int_0^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{-t} \right]_0^A + \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

En posant $u = 2t$, on obtient l'égalité demandée.

4. **Convergence de Fresnel.**

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$$

converge par le même changement de variable $u = t^2$ et le critère d'Abel (partie réelle de e^{iu}).