Chapitre 15 : « Calcul intégral »

I. Continuité uniforme

1) Définition

Soit f : I→ ℝ une fonction

On dit que f est uniformément continue sur I si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

2) Théorème de Heine (admis)

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

II. Intégrale des fonctions continues par morceaux

1) Intégrale des fonctions en escalier

a) Définition

Une subdivision de [a,b] est une suite $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ strictement croissante avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.

On a ainsi: $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n = b$

b) Vocabulaire

Si tous les points d'une subdivision τ de [a,b] appartiennent à la subdivision σ.

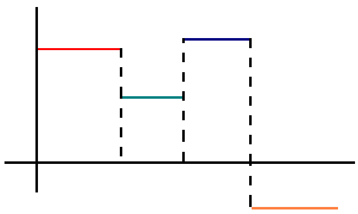
On dit que τ est plus fine que σ.

c) Définition

On appelle fonction en escalier sur [a,b] toute fonction φ définie sur [a,b] pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ de [a,b] vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a_{k-1}; a_k[, \varphi(x) = \lambda_k$

On dit que la subdivision σ est subordonnée à φ

On note E([a,b], ℝ) l'ensemble des fonctions en escalier définies sur [a,b].



Remarque : Il n'y a pas unicité de la subdivision à φ dans la mesure où toute subdivision plus fine sera toujours subordonnée à φ.

d) Définition

Soit $\varphi \in$ E([a,b], ℝ) une fonction en escalier sur [a,b] et $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ une subdivision subordonnée à φ, on définit l'intégrale de φ sur [a,b] et on note

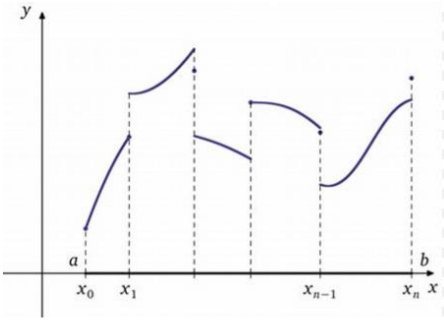
$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - a_{k-1})$

Remarque/théorème (admis): Cette quantité est indépendante de la subdivision choisie.

2) Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux.

a) Définition

On dit que $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur [a,b] s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que pour tout indice k de $[\![1,n]\!]$
La fonction $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ est continue
La fonction $f_{|]a_k,a_{k+1}[} \to \mathbb{R}$ se prolonge continument en une fonction de $[a_k,a_{k+1}]$
On note $C_m([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur [a,b].



b) Approximation d'une fonction continue par morceaux (théorème admis)
Soit $f \in C_m([a,b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$
Il existe $\varphi, \psi \in E([a,b], \mathbb{R})^2$ telles que : $0\leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ et $\varphi \leq f \leq \psi$

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux
Soit $f:[a,b]\to \mathbb{R}$, fonction continue par morceaux sur [a,b]
Alors : $\inf\{\int_a^b \varphi \ ; \varphi \in E([a,b], \mathbb{R}), \varphi \geq f\} = \sup\{\int_a^b \psi \ ; \psi \in E([a,b], \mathbb{R}), \psi \leq f\}$

On définit l'intégrale de f de a à b, et on note $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f$ la valeur commune de ces bornes supérieures et inférieures.

Démonstration :
Pour tout $\varepsilon > 0$, Il existe $\varphi, \psi \in E([a,b], \mathbb{R})^2$ telles que : $0\leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ et $\varphi \leq f \leq \psi$ (c'est la proposition précédente)
Pour $\varepsilon = 1/n$, on construit donc deux suites φ_n et ψ_n telles que :
On a : $\sup_{[a,b]}|f - \varphi_n| \to 0$ et $\sup_{[a,b]}|f - \psi_n| \to 0$ pour n tendant vers l'infini.
Appelons respectivement α_n et β_n ses bornes supérieures
Pour tout x de [a,b], $|\varphi_n - \psi_n| = |\varphi_n - f + f - \psi_n| \leq |f - \varphi_n| + |f - \psi_n| = \alpha_n + \beta_n$
Or : $|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n| \leq \int_a^b |\varphi_n - \psi_n| \leq (b-a)(\alpha_n + \beta_n) \to 0$

III. Propriétés de l'intégrale

1) Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux
Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur [a,b].
Soit $c\in[a,b]$, Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, Alors :
-linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

-relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

-croissance : Si $f\leq g$ alors : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

-positivité : Si $f\geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$

Démonstration : uniquement pour la positivité

Il existe soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi, \psi \in E([a,b], \mathbb{R})^2$ *telles que :* $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ *et* $\varphi \leq f \leq \psi$

Et pour ε *suffisamment petit,* $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi$

On a : $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi$, *or* $\int_a^b 0 \leq \int_a^b \psi - \varphi \leq \int_a^b \varepsilon$, $0 \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq (b-a)\varepsilon$

2) Estimation d'intégrales
Soit f : [a,b]→ $\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On note $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$

Encadrement d'une intégrale : $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

Valeur absolue d'une intégrale : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

3) Intégrale définie-positive
Soit f : [a,b]→ $\mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur [a,b] alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
Avec égalité si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration :
On a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, *et* $0 \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$ *puisque f est positive.*
Soit : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
Et égalité ?
Si f n'est pas identiquement nulle, il existe x dans [a,b] tel que : f(x)>0
Par continuité de f, il existe un intervalle autour de x, noté J, tel que $f(t) > \frac{f(x)}{2}$ *sur* $J \subset [a,b]$.
Par croissance de l'intégrale : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_J f(x)dx \geq \text{Longueur}(J)\frac{f(x)}{2} > 0$

4) Remarque :
En général, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$ (voir le chapitre de deuxième année sur le théorème de convergence dominée, entre autres)

5) Théorème de la valeur moyenne
Soit f∈C([a,b], $\mathbb{R}$**), il existe c∈[a,b] tel que** $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Démonstration : Soit $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ *pour* $t \in [a,b]$
F est dérivable et F'(t) = f(t)
Par le théorème des accroissements finis, pour t=b, il existe c dans [a,b], tel que :
F(b)-F(a) = F'(c)(b-a), soit $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

IV. Liens primitive et intégrale

1) Intégrale fonction de sa borne supérieure
Soit f une fonction continue sur I.

a∈I, et F :I→ $\varkappa$, $définie\ par\ \forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$
Alors, F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x)$ =f(x)

2) Primitive d'une fonction continue
   a) Définition
      Soit g, G :I→ $\varkappa$, on dit que G est une primitive de g sur I si G est dérivable sur I, et $\forall x \in I$, G'(x) = g(x)

      Remarque : Si G est une primitive de g sur I, alors la fonction G + C avec C∈ $\varkappa$ l'est aussi. **Ainsi la fonction $\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$ est une primitive de f.**

      Démonstration :
      Soit F l'application définie sur I par F(x) = $\int_a^x f(t)dt$
      Montrons que F est dérivable et que F' = f.

      Pour x dans I, la continuité de f en x, nous donne que pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *pour tout y tel que |x-y|<*η, *on a* $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
      De plus, F(x+h)-F(x) = $\int_x^{x+h} f(t)dt$

      Et F(x+h)-F(x) – hf(x) = $\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt = \int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt$
      *Pour **h>0 tel que h≤ η**, |F(x+h)-F(x)-hf(x)|≤* $\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \varepsilon h$
      Ainsi : $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon$ *d'où la conclusion*

   b) Théorème
      Soit f∈C(I, $\varkappa$), alors f possède des primitives sur I.
      F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x=a.

      Démonstration : Penser à une constante près, puis évaluer en a…

   c) Théorème fondamental
      Soit f∈C([a,b], $\varkappa$), et F une primitive quelconque de f sur I alors : $\int_a^b f(t)dt =$ F(b) – F(a)

      Démonstration : A une constante près, puis faire le calcul…

   d) Calcul d'intégrales
      Intégration par parties : soit (u,v) ∈C^1([a,b], $\varkappa$)^2 alors :
      $$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

      Démonstration : une primitive de u'v+uv' est uv…

   e) Changement de variable
      Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi: I \to J$ une fonction de classe C^1, f : $I \to \varkappa$ *une fonction continue.*
      Soit $(\alpha, \beta) \in J^2$
      Alors : $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$

Démonstration : $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ a pour primitive $F o \varphi$ avec F primitive de f

Exercice

#À l'aide du changement de variable x = cost, déterminer $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

#Déterminer $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}\cos(\sqrt{x})\,dx$

3) Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique
   a) Etude selon parité
   Soit f∈ $C^0([-a,a];\mathbb{R})$
   Si f est paire alors : $\int_{-a}^{a}f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
   Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a}f(x)dx = 0$

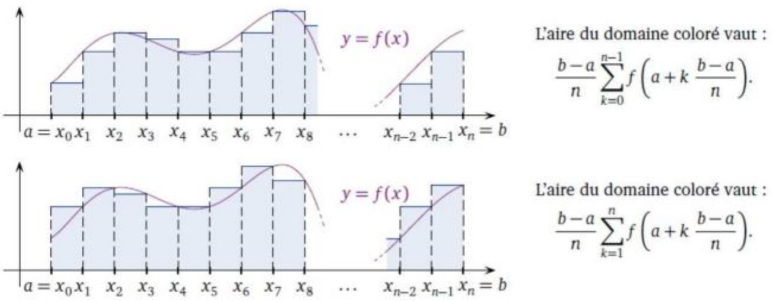
   b) Etude selon période
   Soit f∈ $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, T-périodique, alors $\int_a^{a+T}f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

V. Sommes de Riemann

1) Définition
Soit f ∈C([a,b], ℝ), pour tout entier n non nul, on appelle somme de Riemann d'ordre n associée à f la somme : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+k\frac{b-a}{n})$

Remarque : Cette somme correspond à l'intégrale d'une fonction en escalier g, telle que, $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $g_{]u_k;u_{k+1}[} = f(u_k)$ où u_k est la subdivision de [a,b] de pas $\frac{b-a}{n}$

2) Théorème (admis)
Soit f ∈C([a,b], ℝ), alors : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f$ quand n tend vers l'infini.
Et de façon analogue : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f$ quand n tend vers l'infini.



Exercice :

Déterminer $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Annexe : quelques primitives…

Soit u une fonction dérivable.

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $F : x \mapsto$	u à valeurs dans
$u'.u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$u'.u^n,\ n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$u'.u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$u'.e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u'.\ln(u)$	$u\ln(u) - u$	$\mathbb{R}^{+*}$
$u'.\cos u$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u'.\sin u$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$
$u'.\tan u$	$-\ln\lvert\cos u\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$
$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1+\tan^2 u)$	$\tan u$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$
$u'.\mathrm{ch}\, u$	$\mathrm{sh}\, u$	$\mathbb{R}$
$u'.\mathrm{sh}\, u$	$\mathrm{ch}\, u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,(u)$ ou $-\mathrm{Arccos}\,(u)$	$]-1,1[$ $]-1,1[$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}\,(u)$	$\mathbb{R}$

Quelques méthodes supplémentaires :

1) Primitives de fonctions polynômes en cos(x) et sin(x)
   La méthode la plus générale consiste à linéariser l'expression ou dans certains cas d'essayer de se ramener à la dérivée d'une composée.
   Exemple : Déterminer une primitive de $x \to \cos^3 x$

   On a $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, d'où $\cos^3 x = \frac{e^{3ix}+3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8} = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix}))}{8}$
   Soit: $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$
   D'où une primitive : $\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

2) Primitives de fonctions de la forme $e^{ax}\cos(bx)$
   Pour déterminer une primitive de $e^{ax}\cos(bx)$, on peut identifier la fonction à la partie réelle de $e^{ax}e^{ibx} = e^{ax+ibx} = e^{(a+ib)x}$, puis on prend la partie réelle d'une primitive de $e^{(a+ib)x}$

3) Les règles de Bioche
   Les **règles de Bioche** sont des règles pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus, en les ramenant à des intégrales de fractions rationnelles.
   Précisément, posons w(x)=F(x)dx l'intégrande (avec l'élément différentiel). Alors,

   - si $w(-x)=w(x)$, on pose $t=\cos x$
   - si $w(\pi-x)= w(x)$, on pose $t=\sin x$
   - si $w(\pi+x)=w(x)$, on pose $t=\tan x$

- si aucune des propriétés n'est vérifiée, on pose t=tan(x/2). (*Rappels : On a alors* $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $tanx = \frac{2t}{1-t^2}$)

  Exemple : Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^3x}{1+cos^2x}dx$

4) Décomposition en éléments simples

   Proposition : Soient A et B des polynômes de K[X], et $F = \frac{A}{B}$(appelée fraction rationnelle)

   $\exists!(Q\,;R) \in (K[X])^2$ tel que $F = Q + \frac{R}{B}$avec $\deg(R) < \deg(B)$.

   Q est appelée partie entière de F ; $\frac{R}{B}$ est appelée partie fractionnaire de F.

   a) Démontrer la proposition précédente.
   b) Déterminer les parties entières de : $\frac{X^2-5X+4}{X-2}$ puis, $\frac{X^4+2X^2+X+1}{X^2+1}$

   Le principe de la décomposition en éléments simples consiste à substituer à une fraction rationnelle, une somme de fractions « plus simples ».

   Le théorème :

   Théorème : Soit $F = \frac{A}{\alpha\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{r_i}\prod_{i=1}^{m}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{v_i}}$

   où $A \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ (tous distincts) et $\forall i$: $(r_i, v_i) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\alpha_i^2 - 4\beta_i < 0$.

   F s'écrit de manière unique sous la forme :

   $F = Q + \sum_{1\le i\le n}\left(\sum_{1\le j\le r_i}\frac{r_{ij}}{(X-a_i)^j}\right) + \sum_{1\le i\le m}\left(\sum_{1\le j\le v_i}\frac{a_{ij}X+b_{ij}}{(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^j}\right)$ où r_{ij}, a_{ij}, et $b_{ij} \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   Cette expression est appelée **décomposition en éléments simples** de F dans $\mathbb{R}[X]$.

   Applications : Déterminer les décompositions en éléments simples de :

   c) $A = \frac{1}{X(X+1)}$
   d) $B = \frac{X^3}{X^2-1}$
   e) $E = \frac{1}{(X+2)(X+1)^2}$
   f) $C = \frac{1}{X(X^2-1)(X+2)}$
   g) $D = \frac{X^3}{(X^2+1)^2}$
   h) $F = \frac{1}{(X^2+2)^2X^2}$