

Chapitre 2 : Calculs algébriques

M. Calciano

I. Somme et produit

1) Définitions

Étant donnés des réels (et dans quelques temps des nombres complexes...) $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour éviter l'ambiguïté des points de suspension et écrire plus rapidement, on désigne la somme $a_1 + \dots + a_n$ par $\sum_{k=1}^n a_k$ et le produit $a_1 \times \dots \times a_n$ par $\prod_{k=1}^n a_k$.

Exemples :

- $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$ (au passage cette somme est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$).

- $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$.

2) Sommes et produits particuliers

a) Somme et produit partiel

$$a_p + \dots + a_q = \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{p \leq k \leq q} a_k = \sum_{k \in \llbracket p, q \rrbracket} a_k$$

$$a_p \times \dots \times a_q = \prod_{k=p}^q a_k = \prod_{p \leq k \leq q} a_k = \prod_{k \in \llbracket p, q \rrbracket} a_k$$

b) Cas d'une famille finie quelconque

Si I désigne un ensemble fini et non vide, on peut étendre les définitions précédentes à $(a_k)_{k \in I}$ et écrire :

$$\sum_{k \in I} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k \in I} a_k.$$

c) Remarque

La lettre utilisée intervenant dans l'écriture des sommes et produits est une *variable muette* servant à décrire l'ensemble d'indexation ; on peut utiliser n'importe quelle lettre :

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{j \in I} a_j.$$

Exercice : Calculer $\sum_{k \in \llbracket p, q \rrbracket} a$ et $\prod_{1 \leq k \leq n} a$.

Réponse : $\sum_{k \in \llbracket p, q \rrbracket} a = (q - p + 1)a$ et $\prod_{1 \leq k \leq n} a = a^n$.

On convient que $\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.

Exercice n°1

Soit $\Omega = \{1; 4; 5\}$. Déterminer $\prod_{x \in \Omega} (x - 1)$.

Soit n un entier naturel.

a) Calculer $\sum_{k=0}^n k$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^n n$.

3) Premières règles de calcul**a) Séparation**

$$\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k, \quad \prod_{k \in I} (a_k b_k) = \left(\prod_{k \in I} a_k \right) \left(\prod_{k \in I} b_k \right).$$

b) Relation de Chasles

Si $p \leq r \leq q$ alors :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k, \quad \prod_{k=p}^q a_k = \left(\prod_{k=p}^r a_k \right) \left(\prod_{k=r+1}^q a_k \right).$$

c) Sommation par paquets

Si I_1 et I_2 sont deux ensembles disjoints :

$$\sum_{k \in I_1 \cup I_2} a_k = \sum_{k \in I_1} a_k + \sum_{k \in I_2} a_k, \quad \prod_{k \in I_1 \cup I_2} a_k = \left(\prod_{k \in I_1} a_k \right) \left(\prod_{k \in I_2} a_k \right).$$

On parle de *sommation par paquets*. Dans la pratique, I_1 désigne souvent les termes pairs et I_2 les termes impairs, mais ce n'est pas exclusif.

Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

On distingue les termes pairs et impairs :

$$S = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{2\ell} (2\ell) + \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{2\ell+1} (2\ell+1) = \sum_{\ell=1}^n 2\ell - \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1).$$

$$S = 2 \sum_{\ell=1}^n \ell - 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell - \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - n = n.$$

d) Multiplication par un scalaire

Si α est un réel (ou un complexe),

$$\sum_{k \in I} \alpha a_k = \alpha \sum_{k \in I} a_k, \quad \prod_{1 \leq k \leq n} (\alpha a_k) = \alpha^n \prod_{1 \leq k \leq n} a_k.$$

4) Changements d'indice

Si r est un entier, dans la somme $S = \sum_{k=p}^q a_k$, on peut effectuer le changement d'indice $j = k + r$ et alors :

$$S = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}.$$

Exercice : Pour $n \geq 2$, calculer $S = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$.

On décompose $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{\ell=3}^{n+2} \frac{1}{\ell}$$

avec $\ell = k + 2$. Ainsi $S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$.

5) Sommes télescopiques et produits télescopiques

Lien vidéo

a) Somme télescopique

On appelle *somme télescopique* toute somme $S = \sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k)$.

Démonstration : En utilisant une ré-indexation judicieuse, on démontre que $S = a_{q+1} - a_p$.

b) Produit télescopique

On appelle *produit télescopique* tout produit $P = \prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k}$ où les a_k sont supposés non nuls.

Démonstration : On démontre que $P = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

$$S = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln k.$$

En posant $\ell = k + 1$ dans la première somme :

$$S = \sum_{\ell=2}^{n+1} \ln \ell - \sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

6) Sommes doubles

a) Sommes sur un rectangle $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

Soient $(b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(c_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux familles de réels. Alors

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^p c_j \right).$$

Démonstration :

$$\sum_{(i,j)} b_i c_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p b_i c_j \right) = \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^p c_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^p c_j \right).$$

b) Sommes sur un triangle

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

Démonstration : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq i$ équivaut à $1 \leq j \leq n$ et $j \leq i \leq n$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$.

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cdot j = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

II. Coefficients binomiaux

1) Rappels

Pour n entier naturel non nul, on définit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k$, et on pose $0! = 1$.

2) Définition

Étant donnés deux entiers naturels n et p , on appelle *coefficient binomial* « p parmi n » et on note

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (n-k).$$

Si $p > n$ (ou $p < 0$), alors $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$.

De façon combinatoire, $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p objets parmi n .

3) Propriétés

a) Symétrie

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Démonstration : Démonstration évidente du point de vue combinatoire pour p positif ; pour p négatif, les deux termes sont nuls.

b) Relation de Pascal

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Démonstration : On distingue p négatif, $p = 0$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

c) Formule du binôme de Newton

Étant donnés $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

Démonstration : Par récurrence en utilisant la formule de Pascal.

Exercice : Développer $(a+b)^5$ et calculer $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n.$$

III. Petits systèmes linéaires

Un système linéaire de n équations à p inconnues est la donnée de n équations linéaires à p inconnues.

La méthode du *pivot de Gauss* généralise la méthode par combinaison.

Les opérations élémentaires autorisées sont :

- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (ajout à une ligne d'un multiple d'une autre),
- $L_j \leftarrow \alpha L_j$ avec $\alpha \neq 0$ (multiplication d'une ligne par un réel non nul),
- $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange de deux lignes).

Quatre cas peuvent se présenter.

1) Obtention d'une unique solution

$$\text{Résoudre } (S) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Le coefficient 2 de la première équation est choisi comme pivot.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \quad (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x_2 - 6x_3 = -3 \quad (L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_3 = 3 \end{cases}$$

On obtient $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = -2$; le triplet $(-2, -3, -1)$ est solution.

2) Obtention d'une infinité de solutions

$$\text{Résoudre } (S) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

On exprime les solutions en fonction de x_3 (inconnue secondaire).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$$

Finalement $x_1 = \frac{3+x_3}{2}$, $x_2 = x_3 - 2$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

3) Système incompatible

$$\text{Résoudre } (S) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Après transformations, on aboutit à une équation impossible (par exemple $0 = 1$). Le système n'a pas de solution.

IV. Quelques éléments et outils supplémentaires

1) Valeur absolue

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$ (distinguer les signes).

Démontrer l'inégalité triangulaire $|x + y| \leq |x| + |y|$ (élever au carré).

Démontrer $||x| - |y|| \leq |x + y|$ (utiliser $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y|$).

2) Division euclidienne de polynômes

Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 1$ par $X^2 + X + 3$.

3) Factorisation

Soit $P(X) = X^3 - X^2 - X + 1$.

a) Vérifier que -1 est racine de P .

b) En déduire par deux méthodes différentes la factorisation de P .

V. Exercices

Rappels du chapitre 1 :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice n°2

Pour n entier naturel non nul, calculer les sommes suivantes :

$$1) S_n = \sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3)$$

$$2) S_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

$$3) S_n = \sum_{k=0}^n k \times k!$$

Exercice n°3

Pour n entier naturel non nul, calculer $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice n°4

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$1) S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i$$

$$2) S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$$

$$3) T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

$$4) M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

Exercice n°5

Soit k, p, n des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$.

$$1) \text{ Montrer que } \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}.$$

2) En déduire la valeur de :

$$a) S = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p}$$

$$b) T = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

Exercice n°6

Déterminer deux nombres a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$.

Pour n entier non nul, déterminer $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice n°7

Soit n un entier naturel non nul, on pose $S = \sum_{i=1}^n i 2^i$.

$$1) \text{ Montrer que } S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2^i.$$

2) Montrer alors que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Exercice n°8

Montrer que pour p et q entiers naturels vérifiant $p \leq n$, on a $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice n°9

Démontrer de deux façons différentes l'inégalité de Bernoulli : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice n°10

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, calculer $S = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$.

Exercice n°11

Pour n entier naturel, calculer $S = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \min(i,j)$.

Exercice n°12

Pour n entier naturel, calculer $S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ (indication : vérifier d'abord que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$).

Exercice n°13

Résoudre : $\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Exercice n°14

Résoudre en discutant suivant la valeur du paramètre α :

$$S \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = \alpha \end{cases}$$

Exercice n°15

Résoudre les deux systèmes suivants :

$$S \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad T \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice n°16

Étant donné $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Exercice n°17

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases}$$

Exercice n°18

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

Exercice n°19

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Exercice n°20

Pour a réel et n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$.

- 1) Calculer S_n pour $a = 1$.
- 2) Pour $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n .

Exercice n°21

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $|2x - 3| \leq |6 - x|$.

Exercice n°22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1 + x)^n.$$

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, donner le développement par la formule du binôme de Newton de $f_n(x)$.
- 2) En déduire pour $x \in \mathbb{R}$ les valeurs de

a) $g_n(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$, puis de $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (-1)^k$;

b) $h_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}$, puis de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}$.