

Corrigés d'exercices — Réduction des endomorphismes

M. Calciano

Exercice n° 1

(8 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On demande : 1) χ_A ; 2) $\text{Sp}(A)$; 3) les sous-espaces propres ; 4) A est-elle diagonalisable ?

1) Polynôme caractéristique.

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -3 & -2 \\ 2 & x-5 & -2 \\ -2 & 3 & x \end{vmatrix}.$$

On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & -2 \\ 0 & x-5 & -2 \\ x-2 & 3 & x \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & x-5 & -2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}.$$

En développant :

$$\chi_A(x) = (x-2)[x(x-5) + 6 + 6 + 2(x-5)] = (x-2)(x^2 - 5x + 12 + 2x - 10),$$

$$\chi_A(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2),$$

$$\boxed{\chi_A(x) = (x-2)^2(x-1)}.$$

2) Spectre.

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1; 2\}}.$$

3) Sous-espaces propres.

Sous-espace $E_1(A)$. On résout $AX = X$, $X = (x, y, z)$:

$$\begin{cases} 3y + 2z = x \\ -2x + 5y + 2z = y \\ 2x - 3y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

En combinant les lignes :

$$\iff \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Sous-espace $E_2(A)$. On résout $AX = 2X$:

$$\begin{cases} 3y + 2z = 2x \\ -2x + 5y + 2z = 2y \\ 2x - 3y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{3y + 2z}{2}.$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

4) Diagonalisabilité.

χ_A est scindé et $\dim E_1(A) = 1 = m(1)$, $\dim E_2(A) = 2 = m(2)$, donc

A est diagonalisable.

Exercice n° 2

(15 points)

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On demande : 1) $\text{Sp}(B)$ sans calcul ; 2) B est-elle diagonalisable ?

1) Spectre sans calcul.

$\text{rg}(B) = 1$. Par théorème du rang, $\dim \ker B = 3$.

Donc 0 est valeur propre, avec $\dim E_0 = 3$. De plus $\text{tr}(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, et comme $\text{rg}(B) = 1$ la somme des valeurs propres vaut la trace : la valeur propre non nulle est donc 10.

$$\text{Sp}(B) = \{0; 10\}.$$

2) Diagonalisabilité.

On a $1 \leq \dim E_{10}$ et $\dim E_0 = 3$.

Or $\dim E_{10} + \dim E_0 \leq 4$, donc $\dim E_{10} \leq 1$.

Ainsi $\dim E_{10} = 1$.

Finalement $E = E_{10} \oplus E_0$, donc

B est diagonalisable.

Exercice n° 3

()

1) Invariance du polynôme caractéristique par similitude.

Soit $A \sim B$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det(xI_n - PBP^{-1}) = \det(xPP^{-1} - PBP^{-1}) = \det(P) \det(xP^{-1} - BP^{-1}),$$

$$\chi_A(x) = \det(P) \det(xI_n - B) \det(P^{-1}) = \chi_B(x).$$

2) Matrice symétrique 2×2 .

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) A est-elle diagonalisable ?

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -b & x - c \end{vmatrix} = (x - a)(x - c) - b^2 = x^2 - (a + c)x + ac - b^2.$$

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Le discriminant est toujours positif ou nul, donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ (à racines réelles, éventuellement confondues). En cas de racine double ($\Delta = 0$, i.e. $a = c$ et $b = 0$), A est déjà une matrice scalaire, donc diagonale.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable (pour tout } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{).}}$$

b) *Le résultat subsiste-t-il sur $\mathbb{C}^3$?* On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - 2 & -i \\ -i & x \end{vmatrix} = x(x - 2) - i^2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

$$\text{Sp}(A) = \{1\}.$$

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à l'identité, donc égale à I_2 : absurde.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

La démonstration du a) ne s'étend donc pas à $\mathbb{C}^3$, précisément parce que le discriminant $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$ n'est plus nécessairement réel positif dès que a, b, c sont complexes.