## Chapitre 16 : Relations de comparaison

### I. Comparaison locale des fonctions

1) Définitions « théoriques »

Soit f et g deux fonctions de I→ ℝ, a∈ $\bar{I} \cup \{+\infty\}$

-On dit que f est **dominée par g au voisinage de a**, et on note f = $O_a(g)$ s'il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi: \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, f(x) = $\varphi$(x)g(x) et telle que $\varphi$ soit bornée.

-On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de a**, et on note f = $o_a(g)$ s'il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi: \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, f(x) = $\varphi$(x)g(x) et telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 0$

-On dit que f **est équivalente à g au voisinage de a,** et on note f $\sim_a(g)$ s'il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi: \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, f(x) = $\varphi$(x)g(x) et telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 1$

Exemples :

1. $x^2 = o_0(x)$
2. $(x-5)^2 = o_5(x-5)$
3. $2x^2 = O_0(x^2)$

Remarques :

Si f = $o_a(1)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Si f = $o_a(0)$ *ou* $O_a(0)$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a.

Si f = $o_a(1)$ *ou* $O_a(1)$ si et seulement si f est bornée

2) Définitions « pratiques »

Soit f et g deux fonctions de I→ ℝ, a∈ $\bar{I} \cup \{+\infty\}$

On suppose que g ne s'annule pas sur I\{a} et f et g continues en a si a∈ $I$, alors :

→ f est dominée par g au voisinage de a, f = $O_a(g)$, si et seulement si (f/g) est bornée au voisinage de a.

→ f est négligeable devant g au voisinage de a, f = $o_a(g)$, si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f/g = 0$

→ f est équivalente à g au voisinage de a, f $\sim_a(g)$, si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f/g = 1$

Démonstration : Revenir aux définitions !

Exercice :

Montrer que $\sin(x) \sim_0 x$ puis que : $x + e^x \sim_{+\infty} e^x$

3) Proposition

Soit a∈ $\overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction définie sur un voisinage de a , si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$ alors f $\sim_a$(L)

Remarque : Ce résultat est problématique pour L=0, en effet, la fonction f serait alors identiquement nulle sur tout un voisinage de a.

4) Proposition
Autre formulation de l'équivalence :
Soit f et g deux fonctions de I→ $\mathbb{R}$, a∈ $\bar{I} \cup \{+\infty\}$, alors f $\sim_a(g)$ ⟺f-g = $o_a(g)$

Démonstration :
Si f $\sim_a(g)$ alors : il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi: \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, f(x) = $\varphi$(x)g(x) et telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 1$
Donc sur ce voisinage : f(x)-g(x) = $\varphi$(x)g(x) – g(x) = ($\varphi$(x)-1)g(x)
Or $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) - 1 = 0$, donc f-g = $o_a(g)$

Réciproquement, si f-g = $o_a(g)$, alors il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi: \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, f(x)-g(x) = $\varphi$(x)g(x) et telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 0$
Et f(x) = $\varphi$(x)g(x)+g(x) = ($\varphi$(x)+1)g(x) et $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) + 1 = 1$ et f $\sim_a(g)$

5) Quelques propriétés des o et O
Produit : Si $f_1=O(g_1)$ et si $f_2=O(g_2)$ alors $f_1f_2=O(g_1g_2)$
Et, si $f_1=o(g_1)$ et si $f_2=o(g_2)$ alors $f_1f_2=o(g_1g_2)$

Somme : Si $f_1=O(g)$ et si $f_2=O(g)$ alors $f_1+f_2=O(g)$
Et, si $f_1=o(g)$ et si $f_2=o(g)$ alors $f_1+f_2=o(g)$

Transitivité : Si $f_1=O(g_1)$ et si $g_1=O(g_2)$ alors $f_1=O(g_2)$
Et, si Si $f_1=o(g_1)$ et si $g_1=o(g_2)$ alors $f_1=o(g_2)$

Exercice :
1) Justifier que :
   a) O(1)+o(1)=O(1)
   b) O(1)-O(1)=O(1)
   c) o(2x)=o(x)
2) Simplifier au maximum (sans perte de précision) :
   a) $1+2x-x^2+o_0(x)$ $\quad$ $1+2x+o_0(x)$
   b) $5x^5 - 3x^2 + o_0(x^3)$ $\quad$ $-3x^2+o_0(x^3)$
   c) $-2+x^2-x^3 + o_0(x+1)$ $\quad$ $-2+o_0(1)$

6) Propriétés des fonctions équivalentes
Soit f et g deux fonctions de I→ $\mathbb{R}$, a∈ $\bar{I} \cup \{+\infty\}$
Soit f $\sim_a(g)$

a) Théorème dit des limites :$\forall L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

Démonstration :

Conséquence immédiate de f(x) = $\varphi$(x)g(x) avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 1$

b) Proposition

On a : f>0 au voisinage de a si et seulement si g>0 au voisinage de a.

Démonstration : f(x) $= \varphi$(x)g(x) avec $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 1$, donc f et $\varphi$ sont strictement positives sur un voisinage de a, et par la règle des signes, g également !

7) Opérations compatibles avec une relation d'équivalence
Soit : $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ : fonctions de I$\to \mathbb{R}$, a$\in \bar{I} \cup \{+\infty\}$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

On suppose que : $f_1 \sim_a (f_2)$ et $g_1 \sim_a (g_2)$ alors :

On a : $f_1(x)g_1(x) \sim_a f_2(x)g_2(x)$

Si de plus, $g_1$ ne s'annule pas sur I\{a}, alors : $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim_a \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$

Si de plus, $f_1>0$ sur I\{a}, alors : ${f_1}^{\alpha}(x) \sim_a {f_2}^{\alpha}(x)$

Attention : De façon générale, la somme des équivalents n'est pas un équivalent de la somme !

Ainsi pour des fonctions $g_1$ et $g_2$ ne s'annulant pas, on peut avoir $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \to 1$ et $\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \to 1$ sans pour autant avoir $\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} \to 1$...

Illustration :

Montrer que : $1+x \sim_0 1$, a-t-on $1+x-1 \sim_0 1-1$, c'est-à-dire $x \sim_0 0$ ?

Que peut-on dire de cette requête sur ChatGpt ?

**Exemples de fonctions équivalentes à 0 en 0 :**

1. $x^n$ **pour** $n > 0$
   - Par exemple, $f(x) = x^2$ est équivalente à $0$ en $0$.
   - Plus généralement, toute puissance positive de $x$, comme $x^3$, $x^4$, etc., convient.
2. **Les fonctions exponentielles moins 1**
   - $f(x) = e^x - 1 - x$ est équivalente à $0$ en $0$ (car son développement limité commence à l'ordre $x^2$).

Remarque : Dans un calcul d'équivalent, il peut être utile de remplacer la relation f $\sim_a (g)$ par f(x) = g(x) + o(g(x)). On pourra ainsi additionner de telles égalités !

Exemple :
Montrer que : $\sin(5x) \sim_0 5x$
Montrer que : $\mathrm{sh}(2x) \sim_0 2x$
Traduire les deux équivalents précédents par des égalités
En déduire que $\sin(5x)-\mathrm{sh}(2x) \sim_0 3x$

Reprendre l'exercice précédent pour f(x)=sin(2x)-sh(2x). Pourquoi n'obtenons-nous pas mieux que f(x)=$o_0(x)$ ? (Cela encourage ainsi à développer et à employer un outil plus puissant : les formules de Taylor-Yong…)

Remarque n°2 : Il n'y a aucun rapport entre f $\sim_a(g)$ et $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\ \frac{1}{x^2}=0$ et pourtant $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}x=+\infty$

Ou encore : $x^2+5\sim_{+\infty}x^2$ mais $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+5)-x^2=5$

8) Théorème

Soit : $f_1$, $f_2$: fonctions de I→ ℝ, a∈ $\bar{I}\cup\{+\infty\}$

Si $f_2(x)=o_a(f_1(x))$, alors $f_1(x)+f_2(x)\ \sim_a((f_1(x))$

Démonstration :

On a $f_2(x)=\varphi(x)\, f_1(x)$avec $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ =0$

On peut en déduire que $f_1(x)+f_2(x)=f_1(x)+\varphi(x)\, f_1(x)=(\varphi(x)+1)\, f_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)+1\ =1$

9) Théorème dit de composition « à droite »

Soit f et g fonctions de J→ ℝ, a∈ $\bar{I}\cup\{+\infty\}$

Soit h : I→ ℝ, b∈ $\bar{J}\cup\{+\infty\}$, tels que h(I)⊂J

Si $\lim\limits_{x\to a}h(x)=$ b et f(y) $\sim_b g(y)$ alors foh(x) $\sim_a goh(x)$

Attention, ce théorème est en général faux pour la composée à gauche, ainsi : f(y) $\sim_b g(y)\nRightarrow$ hof(x) $\sim_a hog(x)$

Démonstration :

Si $\lim\limits_{x\to a}h(x)=$ b, alors $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, $|x-a|<\eta$, $|h(x)-b|<\varepsilon$

f(y) $\sim_b g(y)$, alors il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi\colon\nu\to\mathbb{R}$ vérifiant pour tout y de $\nu$, f(y) = $\varphi$(y)g(y) et telle que $\lim\limits_{y\to b}\varphi=1$

Pour $\eta$ suffisamment petit, h(x) sera dans $\nu$

Donc f(h(x)) = $\varphi$(h(x))g(h(x)) et $\lim\limits_{x\to a}\varphi oh(x)=1$

10) Proposition

Soit f : I→ ℝ, dérivable en a∈I, alors : si f '(a)≠0, f(x) – f(a)$\sim_a$f '(a)(x-a)

Démonstration

Si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$ f '(a)

Donc comme f '(a) ≠0, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)f'(a)}=1$

Soit $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)f'(a)}$, on a $\lim\limits_{x\to a}\varphi=1$ et f(x)-f(a) = $\varphi$(x)f '(a)(x-a)

11) Comparaison de fonctions usuelles

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^{*+})^3$ tels que $\alpha < \beta$ *et a>1*
Au voisinage de 0 : $(\ln(|x|)^{\alpha} = o_0(1/x^{\alpha})$ et $x^{\beta} == o_0(x^{\alpha})$

Au voisinage de $+\infty$ : $(\ln(x))^{\gamma} = o_{x\to+\infty}(x^{\alpha})$ et $x^{\alpha} = o_{x\to+\infty}(x^{\beta})$

12) Equivalents classiques en 0 :
$\sin(x) \sim_0 x$, de même $\mathrm{sh}(x) \sim_0 x$
$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim_0 \alpha x$
$1-\cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$, de même $\mathrm{ch}(x)-1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$
$\ln(1+x) \sim_0 x$
$\tan(x) \sim_0 x$
$e^x - 1 \sim_0 x$

Démonstrations : voir cours de terminale !

Remarque : Les formules : $e^x - 1 \sim_0 x$ et $e^x \sim_0 x+1$ sont deux choses, vraies mais bien différentes ! La première donne la vitesse à laquelle $e^x$ converge vers 1 tandis que la deuxième de contente de dire que $e^x$ converge vers 1.

13) Equivalent d'un polynôme
Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$, par $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_n x^n$ avec $d \leq n$
Au voisinage de 0 : $P(x) \sim_0 (a_d x^d)$ (monôme de plus bas degré)

Au voisinage de $\pm\infty$ : $P(x) \sim_{\pm\infty} a_n x^n$ (monôme dominant)

Démonstration : Factorisation par le terme monôme dominant

## II. Relations de comparaison des suites

1) Définitions :
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang $n_0$
-On dit que u est dominée par v et note $u_n = O(v_n)$ si la suite $u_n/v_n$ est bornée

-On dit que u est négligeable devant v et note $u_n = o(v_n)$ si la suite $u_n/v_n$ converge vers 0

-On dit que u est équivalente à v et note $u_n \sim v_n$ si la suite $u_n/v_n$ converge vers 1

Remarques :
$(u_n)$ est bornée si, et seulement si, $u_n = O(1)$.
$(u_n)$ est convergente vers 0 si, et seulement si, $u_n = o(1)$.

Exemple : On a : $\frac{4n+1}{n^2+3} = O(\frac{1}{n})$

2) Caractérisation de l'équivalence
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang $n_0$ alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$

Démonstration : Même principe que pour les fonctions.

3) Propriétés

**Soit : $u_n \sim v_n$**

**Théorème dit des limites :$\forall L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = L$**

**Proposition : A partir d'un certain rang, $u_n$ et $v_n$ ont le même signe.**

4) Théorème

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , v $= (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u' = (u_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ , v' $= (v_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$

Si $u_n \sim v_n$ et $u_n' \sim v_n'$ alors $u_n u_n' \sim v_n v_n'$

Si $u_n \sim v_n$ et $u_n' \sim v_n'$ alors $u_n / u_n' \sim v_n / v_n'$

Si $u_n>0$ et $u_n \sim v_n$ alors $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$ pour $\alpha$ réel

Si $v_n = o(u_n)$ alors $u_n + v_n \sim u_n$

5) Comparaison de suites classiques

Soit $\alpha, \beta, \gamma$ 3 réels tels que $\alpha > 0, \beta>0$ et $\gamma>1$

Alors $(\ln(n))^\alpha = o(n^\beta)$, $n^\beta = o(n^\gamma)$ et $n^\gamma = o(n\,!)$

6) Equivalents usuels

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et si $\alpha$ désigne un réel :

$\sin(u_n) \sim u_n$

$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$

$1-\cos(u_n) \sim \frac{u_n{}^2}{2}$

$\ln(1+u_n) \sim u_n$

$\tan(u_n) \sim u_n$

$e^{u_n} - 1 \sim u_n$

7) Formule de Stirling : **On a: $n\,! \sim_{n\to+\infty} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$**

8) Proposition:

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et $(u_n)$ une suite à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Si $f = O_a(g)$ alors $f(u_n) = O_{n\to+\infty}(g(u_n))$

Si $f = o_a(g)$ alors $f(u_n) = o_{n\to+\infty}(g(u_n))$

Si $f \sim_a (g)$ alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} (g(u_n))$

Démonstration :

Montrons que si $f = O_a(g)$ alors $f(u_n) = O_{n\to+\infty}(g(u_n))$

Si $f = O_a(g)$, alors : il existe un voisinage $\nu$ de a dans I et une fonction $\varphi\colon \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\nu$, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que $\varphi$ soit bornée.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| \leq \varepsilon$

Pour N assez grand, $u_n$ est dans $\nu$, et $f(u_n) = \varphi(u_n)g(u_n)$ et telle que $\varphi(u_n)$ soit bornée.