

Chapitre 3 : Les nombres complexes

M. Calciano

*Introduction : Entre le XV^e et le XVI^e siècle, des algébristes italiens ont poursuivi l'aventure de la résolution des équations, qui avait vu l'invention des fractions pour construire des solutions à des équations du type $3x = 5$, des racines carrées pour résoudre $x^2 = 2$, et donc une nouvelle catégorie de nombres pour résoudre des équations du type $x^2 = -1$. Ce chapitre construit cette nouvelle catégorie de nombres — les **nombres complexes** — d'abord de façon purement algébrique (§I), puis en exploitant leur riche interprétation géométrique dans le plan (§II), avant de développer l'outil le plus puissant du chapitre, l'**exponentielle complexe** (§III).*

I. L'ensemble des nombres complexes

a) Définition

La construction du corps des complexes n'étant pas au programme, on admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui en conservent toutes les règles de calcul usuelles (commutativité, associativité, distributivité...), et possédant un élément i tel que $i^2 = -1$.

Définition I.1. Tout nombre complexe s'écrit de manière unique $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle x la **partie réelle** du complexe et y sa **partie imaginaire**. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z .

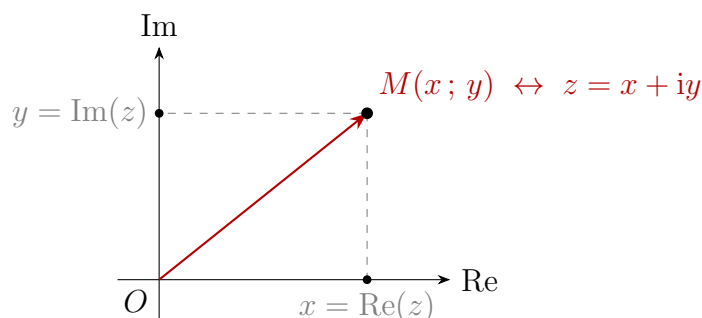


Figure 1: Représentation d'un nombre complexe $z = x + iy$ dans le plan complexe.

Remarque : Les nombres complexes sont des nombres à l'essence profondément géométrique ; nous le détaillerons précisément dans le §II. Toutefois, nous risquons d'avoir besoin, pour faciliter les démonstrations, de l'identification au plan complexe. Ainsi, tout point $M(x; y)$ du plan sera associé à un nombre complexe $z_M = x + iy$ (nous verrons que ce complexe s'appelle l'affixe). Les opérations algébriques sur les complexes auront leur correspondance en transformations géométriques (et réciproquement).

b) Addition et multiplication

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \quad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

Remarque (Retenir la formule du produit plutôt que l'apprendre par cœur) : La formule de zz' n'a pas besoin d'être mémorisée telle quelle : il suffit de développer $(x+iy)(x'+iy')$ comme un produit de deux binômes, en utilisant $i^2 = -1$ pour simplifier le terme en i^2 . Par exemple, pour $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - i$:

$$zz' = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i - 3(-1) = 5 + i.$$

c) Remarques

- On a $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$.
- Le complexe $0 + 0i$ se note simplement 0 .
- Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur** ; leur ensemble se note $i\mathbb{R}$. Par exemple, $3i$ et $-i$ sont imaginaires purs, mais 0 l'est aussi (c'est le seul nombre à la fois réel et imaginaire pur).

d) Conséquence de l'unicité d'écriture

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Démonstration : Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Si $z = z'$, alors $x + iy = x' + iy'$, soit $(x - x') + i(y - y') = 0 = 0 + 0i$. L'unicité d'écriture implique $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$, c'est-à-dire $x = x'$ et $y = y'$. $\square$

Remarque (Intérêt pratique : la méthode d'identification) : Ce résultat, en apparence anodin, est l'un des outils les plus utilisés du chapitre : pour résoudre une équation complexe d'inconnue $z = x + iy$, il pourra ainsi être judicieux de séparer partie réelle et partie imaginaire pour se ramener à un système de deux équations réelles d'inconnues (x, y) . C'est exactement cette méthode qui sera utilisée pour calculer des racines carrées (§I.10) et résoudre des équations du second degré (§III.7).

e) Extension de quelques propriétés calculatoires (liste non exhaustive)

Propriété I.1. $zz' = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété I.2 (Binôme de Newton). Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Propriété I.3 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique). Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=p}^q z^k = \frac{z^p(z^{q-p+1} - 1)}{z - 1}.$$

Propriété I.4 (Factorisation). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Remarque : Ces trois propriétés sont exactement celles que vous connaissez déjà sur $\mathbb{R}$: leurs démonstrations, purement algébriques (récurrence, télescopage), ne font intervenir aucune propriété spécifique de $\mathbb{R}$ et restent donc valables mot pour mot dans $\mathbb{C}$. C'est un principe général du chapitre : tout résultat de calcul algébrique sur $\mathbb{R}$ qui ne repose pas sur la relation d'ordre $\leq$ s'étend sans modification à $\mathbb{C}$.

f) Différence majeure entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Attention, piège classique (il n'existe pas d'ordre sur $\mathbb{C}$) : Contrairement à $\mathbb{R}$, il n'existe aucune relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec l'addition et la multiplication (c'est-à-dire telle que l'on puisse encore « comparer » deux complexes en conservant les règles usuelles : addition d'une même quantité des deux côtés, produit de deux termes positifs positif, etc.). Une expression comme « $2 + 3i < 5 - i$ » n'a donc **aucun sens** et ne doit jamais être écrite.

Preuve de cette affirmation. Si une telle relation d'ordre existait, elle prolongerait l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ (en particulier $0 < 1$), et le produit de deux éléments non nuls de même signe serait toujours strictement positif ; en particulier, pour tout complexe $u \neq 0$, on aurait $u^2 > 0$ (que u soit « positif » ou « négatif », son carré serait positif, exactement comme sur $\mathbb{R}$). En appliquant ceci à $u = i$, on obtiendrait $i^2 > 0$, c'est-à-dire $-1 > 0$, ce qui contredit $0 < 1$. Une telle relation d'ordre ne peut donc pas exister. $\square$

g) Conjugué d'un nombre complexe

Définition I.2. Pour tout complexe z , on appelle **conjugué** de z , noté $\bar{z}$, le complexe défini par $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$. (Une interprétation géométrique sera donnée dans le §II.)

Propriété I.5. Pour tout nombre complexe z :

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Démonstration : Il suffit de faire le calcul directement. $\square$

Propriété I.6. Un nombre complexe est réel si et seulement si $z = \bar{z}$; il est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Propriété I.7. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Démonstration (pour le produit) : On a : $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' - yy' - i(yx' + xy')}$.
D'autre part : $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x - iy)(x' - iy') = \overline{xx' - yy' - i(yx' + xy')}$. $\square$

h) Module

Définition I.3. Pour tout nombre complexe z , le **module** de z , noté $|z|$, est défini par

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Il généralise la valeur absolue sur $\mathbb{R}$: si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ coïncide avec la valeur absolue usuelle de z .

Propriété I.8 (Lien fondamental entre module et conjugué). Pour tout complexe z :

$$z \bar{z} = |z|^2.$$

Démonstration : Avec $z = x + iy$: $z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. $\square$

Remarque : Cette identité, apparemment simple, est la clé de voûte de tout calcul avec des quotients de complexes (§I.11) : elle permet de transformer un dénominateur complexe en un dénominateur réel en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Propriété I.9. Pour tout complexe z : $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|z| = 0 \iff z = 0$; $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Démonstration : Utiliser le fait que $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$. $\square$

Exemple. Déterminons $|3 - i|$ et $|2 + 3i|$:

$$|3 - i| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \quad |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

i) Formules sur le produit, le quotient et l'inverse

Propriété I.10. Pour tout complexe $z \neq 0$: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0).$$

Démonstration : La formule de l'inverse découle immédiatement de $z\bar{z} = |z|^2$: en divisant par $z|z|^2$ (licite car $z \neq 0$), on obtient $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Pour le produit, on calcule $|z_1 z_2|^2 = (xx' - yy')^2 + (yx' + xy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = |z_1|^2 |z_2|^2$. Pour l'inverse : $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ donc $|z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1$, d'où $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$. Le quotient s'en déduit. $\square$

Méthode (mettre un quotient de complexes sous forme algébrique) : Pour écrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme $x + iy$, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $\bar{z}_2$ du dénominateur, ce qui rend le dénominateur réel (grâce à $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$). Par exemple :

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

j) Inégalités triangulaires

Proposition I.1 (Première inégalité triangulaire). Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $u \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = uz_1$.

Démonstration : On développe : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$. L'inégalité équivaut donc à $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$, ce qui résulte de $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||z_2|$. L'égalité a lieu si et seulement si $z_1 = 0$ ou $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+$ (voir exercice). $\square$

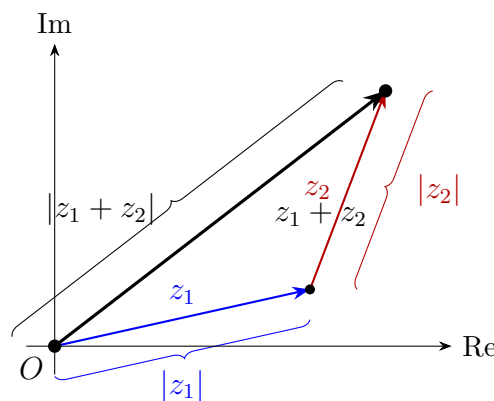


Figure 2: Illustration de l'inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, avec égalité lorsque O , z_1 et $z_1 + z_2$ sont alignés dans le même sens (le « triangle » est aplati).

Proposition I.2 (Deuxième inégalité triangulaire). Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Démonstration : En appliquant la première inégalité triangulaire à $z_1 - z_2$ et z_2 : $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$, donc $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. En échangeant les rôles de z_1 et z_2 , on obtient de même $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$, d'où le résultat. $\square$

Exercice n°1

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\frac{z^2 - 1}{z} \in i\mathbb{R}$.

II. Applications géométriques et argument d'un complexe

Le plan usuel étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tout point M est caractérisé par un unique couple $(x; y)$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

a) Affixe

Définition II.1. Le complexe $z = x + iy$ est appelé **affixe** de $\overrightarrow{OM}$ ou affixe du point M . On note alors M_z le point d'affixe z , ou $M(z)$.

Proposition II.1. Si A et B sont deux points d'affixes a et b , alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Démonstration : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, dont l'affixe est $b - a$. $\square$

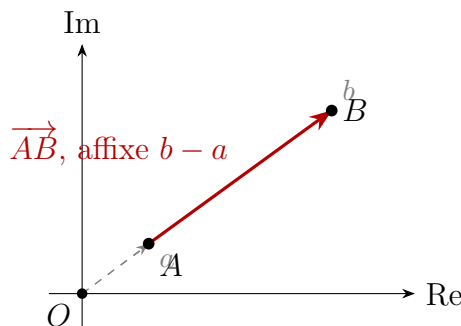


Figure 3: L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Remarque (Traduire un problème de géométrie en calcul complexe) : Cette proposition est le point de départ de toute résolution de problème de géométrie plane par les complexes. Deux traductions à retenir immédiatement :

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $b - a = c - d$;
- le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{a + b}{2}$ (moyenne des affixes).

b) Interprétation géométrique du conjugué et du module

Propriété II.1. Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

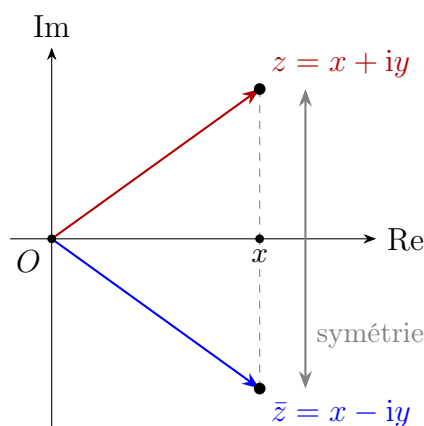


Figure 4: z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Propriété II.2. Si z_1 et z_2 sont deux complexes, alors $|z_1 - z_2|$ est la distance séparant les points d'affixes z_1 et z_2 .

Méthode (décrire un ensemble de points défini par une condition sur le module)
 : Deux types de conditions reviennent très fréquemment et se traduisent géométriquement sans aucun calcul, en interprétant $|z - a|$ comme la distance du point M_z au point A d'affixe a :

- $|z - a| = r$ (avec $r > 0$) décrit le **cercle** de centre A et de rayon r ;
- $|z - a| = |z - b|$ décrit l'ensemble des points **équidistants** de $A(a)$ et $B(b)$, c'est-à-dire la **médiatrice** du segment $[AB]$.

Lorsque l'ensemble n'est pas immédiatement reconnaissable, on peut toujours revenir à la définition en posant $z = x + iy$ et en élevant au carré (les deux membres étant positifs) pour obtenir l'équation cartésienne de l'ensemble.

Exemple. D'après la méthode ci-dessus :

$$A_1 = \{M_z \in \mathcal{P} \mid |z - 2 + 3i| = 4\}$$

est le cercle de centre $\Omega(2 - 3i)$ et de rayon 4 (on écrit $|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)|$ pour identifier le centre), tandis que

$$A_2 = \{M_z \in \mathcal{P} \mid |z - 1 + i| = |z - 3 + 5i|\}$$

est la médiatrice du segment reliant les points d'affixes $1 - i$ et $3 - 5i$.

c) Valeurs remarquables des lignes trigonométriques

Avant d'introduire l'argument, rappelons le tableau des valeurs usuelles de cos et sin, indispensable pour reconnaître rapidement la forme trigonométrique d'un complexe.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque : On retrouve facilement les valeurs pour $\theta \in \{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \dots\}$ et pour les angles négatifs grâce aux formules de symétrie $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, plutôt qu'en mémorisant un tableau plus long.

d) Argument

Lemme II.1. Pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un réel θ tel que l'abscisse de M est $\cos \theta$ et son ordonnée est $\sin \theta$. Ce réel est unique si l'on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Par extension, tout point du plan de module r est repéré par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Définition II.2. Ce nombre θ est appelé **argument** du complexe $z \neq 0$, noté $\arg(z)$. Le module est unique, mais l'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près : on note $\theta \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$, ou $\theta = \arg(z) + 2k\pi$. Le nombre 0 n'a pas d'argument (tout réel serait solution, ce qui n'a pas de sens).

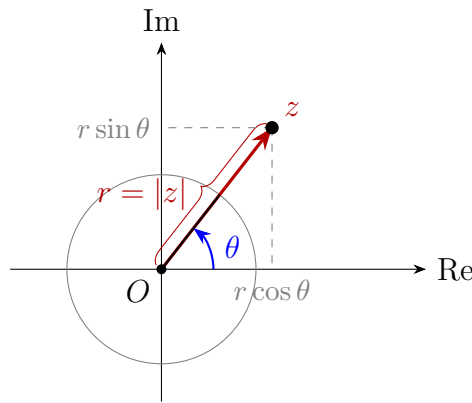


Figure 5: Module $|z| = r$ et argument θ d'un nombre complexe $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Proposition II.2. Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls d'arguments respectifs θ_1 et θ_2 . Alors :

- un argument de $\bar{z}_1$ est $-\theta_1$;
- un argument de $z_1 z_2$ est $\theta_1 + \theta_2$;
- un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\theta_1 - \theta_2$;
- un argument de z_1^n est $n\theta_1$.

Corollaire II.1 (Géométrie). Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et des arguments égaux modulo 2π .

Démonstration : Voir l'exercice final du cours. □

Attention, piège classique (calculer un argument avec arctan sans regarder le quadrant) : Il est tentant de calculer un argument via $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, Cependant, cette formule est vite mise en défaut, par exemple, pour $z = -1 - i$, on aurait $\frac{y}{x} = 1$, donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, alors que l'argument de z est en réalité $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ (ou $\frac{5\pi}{4}$) puisque z est situé dans le troisième quadrant. Le réflexe sûr est de repérer d'abord le quadrant à partir des signes de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, éventuellement en s'aidant du cercle trigonométrique (Figure 8, §III.1), plutôt que d'appliquer arctan aveuglément.

e) Une application géométrique

Proposition II.3. Soient A, B, C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c , avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un argument du complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

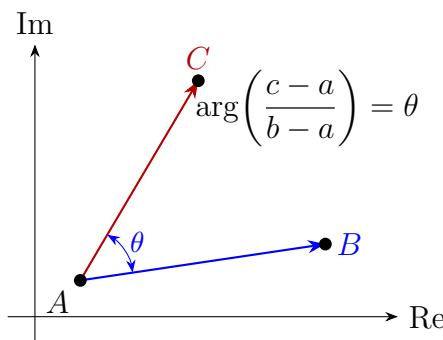


Figure 6: L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un argument de $\frac{c-a}{b-a}$.

Remarque (Deux conséquences immédiates, très utilisées en exercice) :

- A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$ (argument nul ou égal à π) ;
- les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ (argument égal à $\pm\frac{\pi}{2}$).

Remarque : Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta}, \theta \in]-\pi; \pi]\}$.

III. Exponentielle complexe et forme trigonométrique

a) Exponentielle complexe $e^{i\theta}$ avec θ réel

Le fait qu'un argument de $z_1 z_2$ soit $\theta_1 + \theta_2$ rappelle une propriété de l'exponentielle réelle : $e^a e^b = e^{a+b}$. D'où l'idée de désigner le complexe $\cos \theta + i \sin \theta$, de module 1 et d'argument θ , par la notation $e^{i\theta}$ — cette notation est *définie* ainsi, et n'est justifiée qu'à *a posteriori* par le fait qu'elle vérifie effectivement les propriétés attendues d'une exponentielle, énoncées ci-dessous.

On a ainsi :

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

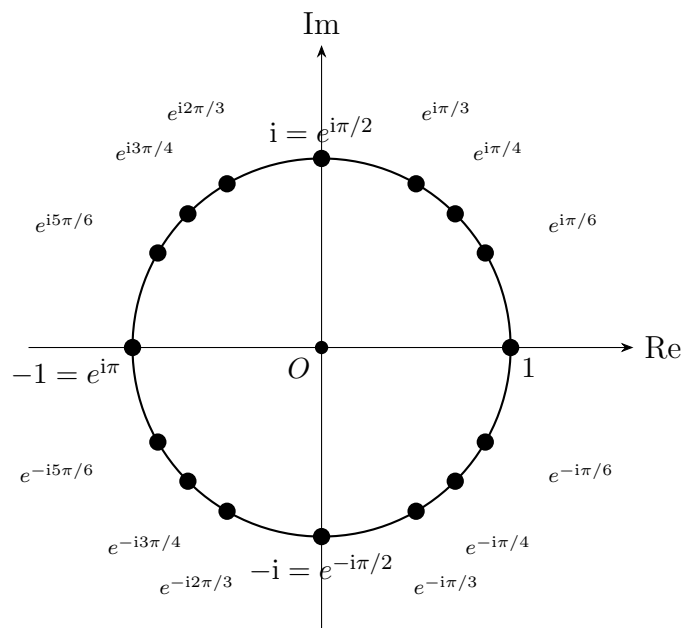


Figure 7: Le cercle trigonométrique : points remarquables $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque : 1. Les complexes de la forme $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) sont de module 1 : ils sont situés sur le cercle trigonométrique.

2. À partir de l'exponentielle complexe, on retrouve les **formules d'Euler** :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Elles seront réutilisées dans le deuxième chapitre sur les complexes pour linéariser des expressions trigonométriques (transformer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en somme de $\cos(k\theta)$).

Exercice n°2

Écrire sans l'exponentielle $e^{i\pi/2}$ et $e^{i\pi}$.

b) Propositions

Soit z un complexe non nul.

Proposition III.1. 1. Si $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. *Démonstration* : Le point d'affixe z est sur le cercle trigonométrique, donc ses coordonnées sont $(\cos \theta; \sin \theta)$, d'où $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$. $\square$

2. Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On a $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ si et seulement si $\theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$ (i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \varphi + 2k\pi$). *Démonstration* : Géométriquement, les deux complexes représentent le même point du cercle trigonométrique, à un nombre entier de tours k près. $\square$

3. Il existe $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $z = r_0 e^{i\theta_0}$ (**écriture exponentielle**). *Démonstration* : Il suffit de considérer $r_0 = |z|$ et z/r_0 , qui est de module 1. $\square$

Exemple détaillé. Écrivons $z = 1 - i$ sous forme exponentielle. On calcule d'abord le module : $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. On factorise ensuite par le module :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4},$$

en reconnaissant, grâce au tableau du §II.3, les valeurs $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le signe négatif de la partie imaginaire (quatrième quadrant, argument négatif).

Méthode (passer de la forme algébrique à la forme exponentielle) : Pour écrire $z = x + iy \neq 0$ sous forme exponentielle $r e^{i\theta}$:

1. calculer $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. factoriser z par r pour faire apparaître $\frac{x}{r} + i \frac{y}{r}$, de module 1 ;
3. reconnaître $\frac{x}{r} = \cos \theta$ et $\frac{y}{r} = \sin \theta$ à l'aide du tableau des valeurs remarquables et du signe de x et y (quadrant), comme dans l'exemple ci-dessus.

Remarque : Bien que 0 n'ait pas d'argument, on écrit parfois $0 = 0 e^{i\theta}$ pour n'importe quelle valeur de θ — c'est une écriture « dégénérée », qui revient à utiliser une boussole au pôle Nord : la direction n'a plus de sens lorsque la distance parcourue est nulle.

Exercice n°3

Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $z_2 \neq 0$. Donner les écritures exponentielles de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_1$ et z_1^n .

On a :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \bar{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1}, \quad z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1}.$$

Propriété III.1. Tout nombre complexe z non nul admet une écriture de la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, appelée **forme trigonométrique** de z (rigoureusement équivalente à la forme exponentielle $|z|e^{i\theta}$, seule la notation diffère). Son principal intérêt réside dans l'obtention de formules ...trigonométriques!

c) Exponentielle complexe e^z avec $z \in \mathbb{C}$

Définition III.1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.

Propriété III.2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$;
- si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
- $e^z \neq 0$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

d) Racine d'une équation polynomiale

Une équation algébrique complexe est une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de la forme $P(z) = 0$, où P est une fonction polynomiale.

Proposition III.2. Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes et si a est une racine de P , alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - a) Q(z).$$

Démonstration : Utiliser la factorisation de $z^k - a^k$ par $z - a$. □

Remarque : La réciproque est immédiate. Si le degré de P est n , alors celui de Q est $n - 1$. En pratique, une fois qu'une racine a est trouvée (souvent en testant des valeurs simples comme $0, \pm 1, \pm i$), on obtient les coefficients de Q par identification ou division euclidienne, ce qui permet de trouver les racines restantes en résolvant une équation de degré inférieur (voir l'exemple ci-dessous).

Exercice n°4

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En remarquant que $P(1) = 0$, factoriser totalement P .

On a $z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = (z - 1)(z^2 - z - 6)$. On résout ensuite $z^2 - z - 6 = 0$: $\Delta = 25$, donc $z = \frac{1 \pm 5}{2}$. Les solutions sont 1, 3 et -2 .

e) Racines carrées

Définition III.2. On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Attention, piège classique (le symbole $\sqrt{}$ n'a pas de sens pour un complexe non réel) : Sur $\mathbb{R}^+$, le symbole $\sqrt{x}$ désigne l'**unique** racine carrée positive de x : il n'y a pas d'ambiguïté à choisir un symbole pour LA racine carrée, puisque l'ordre sur $\mathbb{R}$ permet de distinguer la racine positive de la négative. Sur $\mathbb{C}$, il n'existe pas d'ordre (§I.6) : on ne peut donc pas distinguer canoniquement une racine carrée « positive » d'un complexe. C'est pourquoi on n'écrit jamais $\sqrt{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$: on parle des deux racines carrées de z , notées par exemple δ et $-\delta$, et on les détermine par identification (méthode ci-dessous).

Proposition III.3. Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

Démonstration : Elle est traitée en même temps que l'exemple ci-dessous. $\square$

Méthode (calculer les racines carrées de $z = a + ib$ par identification) : On cherche $Z = x + iy$ tel que $Z^2 = z$. En développant $Z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ et en identifiant parties réelle et imaginaire avec $z = a + ib$, on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ce système à deux équations ne suffit pas à isoler x^2 et y^2 ; on lui adjoint une **troisième équation**, non indépendante mais très utile : $x^2 + y^2 = |Z^2| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (on prend le module de chaque membre de $Z^2 = z$). Les deux équations $x^2 - y^2 = a$ et $x^2 + y^2 = |z|$ donnent alors directement x^2 et y^2 par somme et différence, et le **signe de b** (via $2xy = b$) permet de choisir le bon couple de signes pour (x, y) parmi les deux compatibles avec x^2 et y^2 .

Exercice n°5

Déterminer les racines carrées de $21 - 20i$.

On cherche $x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = 21 - 20i$. Par identification : $x^2 - y^2 = 21$ et $2xy = -20$, soit $xy = -10$. De plus $x^2 + y^2 = |21 - 20i| = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$.

On obtient $2x^2 = 50$, soit $x = \pm 5$, et $2y^2 = 8$, soit $y = \pm 2$. Comme $xy < 0$, on obtient $5 - 2i$ et $-5 + 2i$.

f) Extension des équations du second degré réelles à $\mathbb{C}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$: racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées distinctes $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique. $\square$

g) Résolution d'équation du second degré – cas général

Proposition III.4. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$: racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, en notant δ **une** racine carrée de Δ (au sens du §III.6, sans le symbole $\sqrt{}$ puisque Δ n'a aucune raison d'être réel positif) : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique. $\square$

Remarque : Ce résultat **généralise** le paragraphe précédent : lorsque a, b, c sont réels et $\Delta \geq 0$, une racine carrée de Δ est précisément $\sqrt{\Delta}$ (au sens réel usuel), et l'on retrouve les formules connues. Il n'est donc pas nécessaire de retenir deux formules séparées : celle du cas général (§III.7) suffit dans tous les cas, à condition de savoir calculer une racine carrée complexe (§III.6) lorsque $\Delta \notin \mathbb{R}^+$.

Exemple. Résoudre $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

On calcule $\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 5i) = -3 + 4i$. On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -3 + 4i$: $x^2 - y^2 = -3$, $2xy = 4$, $x^2 + y^2 = 5$. D'où $\delta = 1 + 2i$ (ou $-1 - 2i$), et :

$$z = \frac{(3 + 4i) \pm (1 + 2i)}{2} \implies z_1 = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z_2 = 1 + i.$$

h) Relations entre coefficients et racines

Proposition III.5. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Si z_1 et z_2 sont deux racines de $az^2 + bz + c = 0$, alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration : Expliciter les solutions et vérifier le produit et la somme. □

Exercice n°6

Montrer que si s et p sont deux nombres complexes, alors z_1 et z_2 vérifient le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

si et seulement si z_1 et z_2 sont les deux racines de $z^2 - sz + p = 0$.

Si z_1 et z_2 sont les racines de $z^2 - sz + p = 0$, les relations coefficients-racines donnent $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$. Réciproquement, si $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$, alors $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - sz + p$, donc z_1 et z_2 en sont bien les racines.

IV. Exercices

Exercice n°0

1. Écrire le tableau des valeurs remarquables des cosinus et sinus.
2. Soit $z = -3e^{i\pi/3}$; donner son module et un argument.
3. Écrire $z = -1 - i$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
4. Écrire $z = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$ sans complexe au dénominateur.
5. Dans le plan, on donne $M(3, -4)$; donner l'affixe correspondante.
6. Soit $z = e^{i\pi/3}$; calculer $1 + z + z^2$ de deux façons différentes.
7. Exprimer, pour tout réel θ , $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Exercice n°1

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, établir que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$ ou $z \in \mathbb{R}^*$.

Exercice n°2 (oraux concours)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module. Montrer que

$$U = \frac{(z + z')^2}{zz'}$$

est un nombre réel positif.

Exercice n°3

Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$. Donner la forme exponentielle de z .

Exercice n°4

Résoudre l'équation $iz^2 + (3 + i)z + 2 - 2i = 0$.

Exercice n°5

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - 1| = |z - i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice n°6

Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. Évaluer Z en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

Exercice n°7 (youtu.be/10IKtH0_iKs)

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. l'équation $e^z = 1 + i$;
2. l'équation $e^z + e^{-z} = 2i$;
3. l'équation $e^z = a$ (avec $a \in \mathbb{C}$).

Exercice n°8

Déterminer les racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$.

Exercice n°9

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $6z^2 - (5 - i)z + 2 - \frac{5i}{6} = 0$;
2. $z^3 + (1 - i)z^2 - z + 1 - 3i = 0$, après avoir démontré qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Exercice n°10

Résoudre l'équation $z^2 - (1 + a + a^2)z + a + a^3 = 0$ où a désigne un complexe.

Exercice n°11

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer z pour que les points d'affixes z , z^2 et z^3 :

1. soient alignés ;
2. forment un triangle rectangle ;
3. forment un triangle rectangle isocèle.

Exercice n°12

Montrer que trois points A , B et C d'affixes respectives a , b et c forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice n°13

Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

1. Est-ce que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$?
2. Est-ce que $\forall z' \in \mathbb{C}, \exists! z \in \mathbb{C}^*, z' = f(z)$?

Exercice n°14

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|ab + bc + ac| = |a + b + c|$.

Exercice n°15

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Notons $\theta = \arg(z)$. Montrer que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}$.

Exercice n°16 (oraux concours)

Soit $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Exercice n°17

1. Déterminer les racines carrées, sous forme algébrique, de $z = 1 + i$.
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°18

Soient A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et c . Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC a pour affixe $a + b + c$.

Première année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai — M. Calciano