

DS n°1

M. Calciano

2025/2026

Exercice n°1 sur 4 points

- (a) Traduire, à l'aide de quantificateurs, l'assertion : « f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ ».
(b) À l'aide de quantificateurs, exprimer la négation de l'assertion précédente.
- Traduire en français l'assertion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$.
- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs : le fait que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$
- Donner la négation de :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice n°2 sur 4 points

- Soit A, B et C trois ensembles. Montrer que :

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C.$$

- Démontrer que :

$$A \setminus B = A \iff B \setminus A = B.$$

Exercice n°3 sur 4 points

- Dans cette question, on suppose que x désigne un réel non nul, tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier relatif.
(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, développer $(x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x})$.
(b) Démontrer alors, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier relatif.
- Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
- Déterminer x , un réel non nul, tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier relatif.

Exercice n°4 sur 4 points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

1. Déterminer les valeurs de u_1 , u_2 et u_3 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n (ind. penser à une puissance de 2...)
3. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice n°5 sur 4 points

Les 2 questions sont indépendantes.

1) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x^n - x^{n+1} \leq 1.$$

2) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$