# Chapitre 17 : Calcul différentiel

## I. Dérivée en un point

Soit f une fonction définie au voisinage de : a$\in \mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$

1) Définition :

**On dit que f est dérivable en a lorsque le rapport : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour x $\neq$a, admet une limite finie quand x tend vers a.**

Lorsque cette limite existe, on appelle nombre dérivé en a, et on note f '(a) ou D(f)(a) cette limite.

On remarque que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = $ f '(a)

Exemple : x→ $\sqrt{x}$ est définie sur **[0** ;+∞[ mais dérivable sur **]0** ;+ ∞[

2) Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, f est dérivable en a si et seulement s'il existe d réel et une fonction $\varepsilon: I \to \mathbb{R}$ tel que :

f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)$\varepsilon$(x)

Avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Remarque : Dans ce cas, f '(a) = d

*Démonstration :*

*Si f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)ε(x) avec* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ *alors clairement* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d$

*Réciproquement :*

*Soit* $\varepsilon(x) : \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{x-a} & si\ x \neq a \\ 0\ sinon \end{cases}$, *On a bien* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

3) Théorème

**Si f est dérivable en a alors f est continue en a.**

*Démonstration : évident avec : f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)ε(x) avec* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

<u>Exercice</u>

Soit la fonction g définie par g(x)=$\begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) pour\ x \neq 0 \\ 0\ pour\ x = 0 \end{cases}$

Montrer que g est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

4) Proposition

**Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a. C'est la droite d'équation : y = f '(a)(x-a)+f(a)**

5) Définition

On dit que f est **dérivable à droite** en a si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour x $\neq$a, admet une limite finie quand x tend vers a avec x>a.

Cette limite s'appelle le nombre dérivé à droite et se note $f'_d(a)$
De la même façon, on définit la **dérivée à gauche en a**, notée $f'_g(a)$.

6) Proposition
Si f est définie au voisinage d'un réel a, de la forme $]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta>0$
Alors : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

7) Opérations algébriques sur les fonctions dérivables :
On suppose que f et g sont deux fonctions définies au voisinage d'un réel a et dérivables en a.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
Alors : la fonction $\lambda f + \mu g$ *est dérivable en a* et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$

Alors : la fonction $f\times g$ est dérivable en a et $(f\times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$

Si $g(a)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$

*Démonstration*
*Pour le produit :* $(f\times g)(a+h) - (f\times g)(a) = (f(a+h)) \times (g(a+h)) - (f(a) \times g(a))$
*On a :* $(f\times g)(a+h) - (f\times g)(a) = f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a) = f(a+h)(g(a+h)-g(a)) + g(a)(f(a+h)-f(a))$
*Et:* $\frac{(f\times g)(a+h) - (f\times g)(a)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ...

*Pour l'inverse:* $\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a)-f(a+h)}{f(a)f(a+h)}$... *Pour le quotient : Le transformer en produit...*

8) Théorème de composition
**Si f est une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en f(a) alors gof est dérivable en a et : $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$**

*Démonstration : Posons* $b = f(a)$, $g(y)-g(b) = g'(b)(y-b) + (y-b)\varepsilon(y)$ *avec* $\lim_{y\to b} \varepsilon(y) = 0$
*Donc,* $g(f(x))-g(f(a)) = g'(f(a))(f(x)-f(a))+(f(x)-f(a))\varepsilon(f(x))$ *avec* $\lim_{x\to a} \varepsilon(f(x)) = 0$
*Il reste simplement à diviser par x-a...*

## II. Dérivée sur un intervalle et les théorèmes classiques

Ici I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont à valeur dans $\mathbb{R}$.

1) Définition
**On dit que f est dérivable sur I, si f est dérivable en tout point de I.**

Si f est dérivable sur I, alors la fonction $I\to \mathbb{R}$, $x\to f'(x)$est appelé fonction dérivée de f.

La fonction dérivée est notée f ' ou D(f) ou $\frac{df}{dx}$

Remarque : pour un intervalle fermé en a, la dérivabilité en a se résume à la dérivabilité à gauche ou à droite de a, selon laquelle des deux extrémités correspond « a ».

2) Opérations algébriques
On suppose que f et g sont deux fonctions dérivables sur I.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
Alors : la fonction $\lambda f + \mu g$ *est dérivable sur I*

Alors : la fonction f×g est dérivable sur I

Si g(a)≠0, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I

3) Dérivation d'une composée
Si f est dérivable sur I, et g dérivable sur f(I) alors gof est dérivable sur I, et (gof)' = (g'of)×f'

4) Dérivabilité de la réciproque
Soit $f$ une fonction strictement monotone de I sur J et dérivable sur I.
Si $f'$ ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1}$ est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$

Remarque : Si $f'(a) = 0$, alors $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $f(a)$ et la courbe représentative de $f^{-1}$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse a.

*Démonstration :* $\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{b+h-b}$ *est l'inverse de* $\frac{b+h-b}{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)} = \frac{f\left(f^{-1}(b+h)\right)-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}$ *or* $f^{1}$ *est continue du fait que f une fonction strictement monotone de I sur J et dérivable sur I.*

<u>Exercice :</u>
Justifier que la fonction x→ $x^3\ln(\sin x)$ est dérivable sur $[0\,;\pi[$ et déterminer l'expression de la dérivée.

5) Proposition
Ici a et b désignent deux réels tels que a<b, les fonctions sont toujours à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit f : I→ $\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, et **a**∈ $\boldsymbol{I^0}$ un point intérieur à I.
Si f présente un extremum local en a, alors f '(a) = 0

Remarque : La réciproque est fausse
Une fonction peut admettre un extremum local en a et ne pas être dérivable en a :
x → |x| atteint son minimum en 0 mais n'est pas dérivable en 0
La condition f ′ (a) = 0 n'est pas une condition suffisante d'existence d'un extremum ! h : x → $x^3$ n'a pas d'extremum en 0, pourtant h ′ (0) =0

*Démonstration :*
*On a : f(a+h) = f(a) + f '(a)h + (h)ε(x) avec* $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

*Supposons que f(a) soit un maximum local, pour h>0, f(a+h)≤f(a), donc f '(a)h≤ 0 et f '(a) ≤ 0*
*pour h<0, f(a+h) ≤ f(a),donc f '(a) ≥ 0 et f '(a) = 0*

6) Théorème de Rolle
**Soit f :[a,b] → ℝ une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b[**
**Si f (a) = f (b) alors il existe c∈]a,b[ tel que f '(c) = 0**

*Démonstration :*
*Comme f est continue sur [a,b], alors f est bornée et atteint ses bornes.*
*Si les maximum et minimum sont atteints en a et b, alors f est constante car f(a) = f(b)*
*Sinon les extrema sont atteints dans l'intérieur de I, et donc il existe c dans l'intérieur tel que f '(c) = 0*

7) Théorème des accroissements finis
**Soit f :[a,b] → ℝ une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b[**
**Alors il existe c∈]a,b[ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = f '(c)**

*Démonstration*
*Soit g(t) = f(t)-(f(a)+$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$(t-a))*
*On a g dérivable sur ]a,b[, continue sur [a,b], g(a) = g(b)=0*
*Par le théorème de Rolle, il existe c dans ]a,b[ tel que g'(c) = 0…*

8) Inégalité des accroissements finis
Soit f :[a,b] → ℝ une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b[
On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de [a,b], m≤f '(x) ≤M, alors : m$(b-a)$ ≤f(b)-f(a) ≤M(b-a)

*Démonstration : Soit y < z dans [a,b],on applique le théorème des accroissements finis, il existe x dans ]y,z[, tel que : $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ = f '(x), on a : m≤ $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ≤M*
*Soit : m$(z-y)$ ≤f(z)-f(y) ≤M(z-y)…*

9) Théorème
Soit f : I→ ℝ une fonction dérivable sur I,
Alors : f est constante si et seulement si $\forall x \in I$, f '(x) = 0
Alors : f est croissante si et seulement si $\forall x \in I$, f '(x)≥0
Alors : f est décroissante si et seulement si $\forall x \in I$, f '(x)≤0

*Démonstration :*
*Montrons que f est croissante si et seulement si $\forall x \in I$, f '(x)≥ 0*
*Soit x<y, comme f est dérivable, il existe c dans ]x,y[ , f(y)-f(x) = f '(c)(y-x)*
*On a f croissante si et seulement si f(y)-f(x)≥ 0 si et seulement si f '(c) ≥ 0*

10) Théorème de dérivabilité aux bornes

Soit f :[a,b] → ℝ une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b] et L∈ $\overline{\mathbb{R}}$

Si $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = L \; alors \; \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = L

**En particulier si** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = L} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{alors}$
$\boldsymbol{f \; est \; dérivable \; en \; a}$ à $\boldsymbol{droite \; et \; f'(a) = L}$

11) Théorème

**Soit f : I→ ℝ une fonction continue sur I et dérivable sur I\{a}**
**S'il existe un réel L tel que** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x)}$ **= L**
**Alors : f est dérivable en a, et f '(a) = L, et f ' est continue en a.**

*Démonstration :*
*Soit* $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x) = L$∈ $\overline{\mathbb{R}}$*, pour tout x de I\{a}*
*Il existe* $c_x$ *dans ]a,x[, tel que* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$
*Puisque* $|c_x - a| \leq |x-a|$*, on a* $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$ *et* $f'(c_x) \to L$*, par unicité de la limite f '(a)=L*

## III. Fonctions de classe $C^p$

I désigne un intervalle de ℝ, et p un entier supérieur ou égal à 2, et toutes les fonctions sont à valeurs dans ℝ.

1) Fonctions de classe $C^1$
   a) Définition
      Soit f une fonction définie sur I, on dit que f est de classe $C^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f ' est continue sur I.
   b) Théorème (rappel du II)
      Soit f une fonction continue sur I.
      Si f est dérivable sur I\{a}
      Si f '(x) a une limite finie L lorsque x tend vers a
      Alors f est de classe $C^1$ sur I et f '(a) = L

2) Dérivées d'ordre supérieur
   Soit f une fonction définie sur I.
   On dit que f est p fois dérivable sur I, si f ' est (p-1) fois dérivable sur I.
   On note $f^{(p)}$ cette dérivée p-ième.
   Ainsi : $f^{(p)} = [f^{p-1}]'$
   Par convention, $f^{(0)} = f$

   On note $D^p(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

   <u>Exercice :</u>
   Déterminer les dérivées k-ièmes de :
   $x \to \frac{1}{x}$
   x→cos(x)

3) Fonctions de classe $C^p$

Soit f une fonction définie sur I, p un entier

On dit f est de classe $C^p$ si f est p fois dérivable sur I et si $f^{(p)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $C^\infty$ sur I lorsque : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est $C^k$ sur I.

4) Formule de Leibniz

**Soit n un entier naturel**

**Soit $(f,g)\in(C^n(I))^2$ alors f×g est $C^n(I)$ et $(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$**

Exemple :

Calculer la dérivée n-ième de la fonction suivante : $x\mapsto(x^3+2x-7)e^x$

Posons $f(x)= (x^3+2x-7)e^x$.

On va appliquer la formule de Leibniz en écrivant f(x)=g(x)h(x) avec $h(x)= x^3+2x-7$ et $g(x)= e^x$.

La situation est assez facile ici car $h'(x)=3x^2+2$, $h''(x)= 6x$, $h'''(x)=6$ et $h^{(k)}(x)=0$ dès que $k\geq 4$. D'autre part, les dérivées successives de la fonction exponentielle sont encore égales à la fonction exponentielle. On en déduit que la dérivée n-ième de f est : $(x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+(n^3-3n^2+4n-7))e^x$.

5) Théorème de prolongement de classe $C^p$

Si f est de classe $C^p$ sur I\{a} et si $\forall i \in [\![0,p]\!]$ $f^i(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers a alors f admet un prolongement de classe $C^p$ sur I.

## IV. Les formules de Taylor.

1) Formules de Taylor

a) Formule avec reste intégral à l'ordre n

**Soit f une fonction de classe $C^{n+1}$ sur I, a ∈I**

**Alors : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$**

*Démonstration : par récurrence avec IPP*

b) Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n (ou de reste d'ordre n+1)

**Soit f une fonction n fois dérivable sur [a,b] et n+1 fois dérivable sur ]a,b[**

**Alors il existe c dans ]a,b[ tel que :**

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple :

Soit f :t→ln(1+t) définie sur ]-1 ;+∞[

En appliquant la formule de Taylor -Lagrange à l'ordre 2, on obtient l'existence d'un réel $c_x$ entre 0 et x tel que :

**Il suffit donc de prendre b=x, a=0**

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x\frac{1}{1+0} + \frac{x^2}{2!}\frac{-1}{(1+0)^2} + \frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+c_x)^3} = x-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c_x)^3}$$

c) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n

**Soit f une fonction de classe $C^{n+1}$ sur I, a ∈I**

**Alors : $\forall x \in I, |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$**

**Où $M_{n+1}$ est un majorant de $t \to f^{(n+1)}(t)$**

*Démonstration : On majore la formule de Taylor avec reste intégral.*

2) Formule de Taylor-Young

Si la formule de Taylor-Lagrange donne des renseignements sur tout un intervalle, la formule de Taylor-Young est une formule locale, qui ne donnera des informations qu'au voisinage d'un point. Elle permettra d'affirmer l'existence de développements limités et de faire des études locales de courbes.

a) La formule

**Soit f une fonction de classe $C^{n+1}$ de I dans $\mathbb{R}$**

**Soit a ∈I, alors : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n$**

*Démonstration : Par récurrence sur n*

*Pour n=1, il s'agit du développement limité à l'ordre 1*

*On suppose le résultat vrai au rang n*

*Soit f de classe $C^{n+1}$, alors f ' est de classe $C^n$*

*Et :* $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \varepsilon(x)(x-a)^n$

*On peut intégrer f(t) −f(a) =*$\sum_{k=0}^{n} \int_a^t \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n$

*Donc f(t)-f(a) =*$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n$

*Or* $\frac{1}{|(x-a)^{n+1}|} /\int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n/ \leq \frac{1}{|(x-a)^{n+1}|} \frac{\varepsilon}{2} \int_a^t |(x-a)|^n$ *car pour tout* $\frac{\varepsilon}{2}$ *à partir d'un certain rang* $/\varepsilon(x)/ < \frac{\varepsilon}{2}$

*Et* $\frac{1}{|(x-a)^{n+1}|} /\int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n/ \leq \frac{1}{|(x-a)^{n+1}|} \frac{1}{n+1} /x-a/^{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \to 0$

b) Remarque :

La formule de Taylor-Young en 0 s'écrit :

**$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$**

<u>Exercice:</u>

#Ecrire les formules de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 de $e^x - \sin(x) - \cos(x)$

#En déduire : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{x^2}$

3) Extension…

a) Définition

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$, et f :D→ $\mathbb{C}$

On dit que f est **dérivable en a∈D** si $\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe dans $\mathbb{C}$ et est finie

b) Proposition
Si f est une fonction définie par f(t) = x(t)+iy(t) avec x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors f est dérivable en a si et seulement si x et y sont dérivables en a
Et : f '(a) = x'(a)+iy'(a)

c) Remarques : On peut alors étendre aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ :
- les notions de dérivabilité à droite et à gauche ;
- les opérations : somme, produit, quotient ;
- la notion de dérivée n−ième et la formule de Leibniz ;
- la formule de Taylor-Young.

Attention : La notion d'extremum local n'a plus de sens pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ! Le théorème de Rolle et le TAF ne sont plus valables.

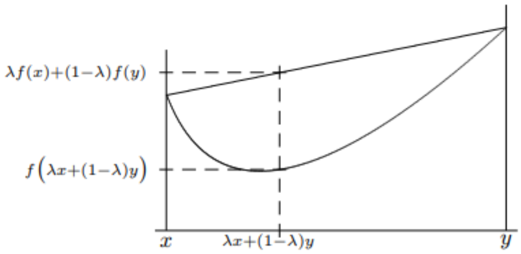
Exercice :
Soit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, t→ $e^{it}$
#Montrer que f est continue sur $[0,2\pi]$
#Montrer que f est dérivable sur $]\,0,2\pi\,[$ et déterminer l'expression de f '
#Vérifier que f(0) = f($2\pi$), quel théorème classique pour une fonction de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est contredit ici ?

## V. Fonctions convexes

1) Définition
**Une fonction f : I → $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :**
**$\forall (x, y) \in I\ \forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$**

Une fonction f est dite concave si -f est convexe

Graphiquement :




Exemple : La fonction Arcsin est convexe sur [0,1], la fonction x→ $\sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$ (très facile à vérifier avec la proposition 6))

2) Proposition
Il y a équivalence entre :
#f convexe sur I
#$\forall (a,b,c) \in I^3, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$
#$\forall a \in$I, x→ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur son domaine de définition

*Démonstration : En exercice !*

3) Proposition :
Si f est convexe sur I et $x_0$ est à l'intérieur de I, alors f est dérivable à droite et à gauche en $x_0$, avec de plus $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

*Démonstration : Il suffit d'écrire l'inégalité des 3 pentes…et de passer à la limite.*

4) Proposition
Si f est convexe sur I, alors f est continue sur l'intérieur de I.

*Démonstration : Prendre deux suites $a_n$ et $c_n$ tendant vers b respectivement par défaut et par excès, écrire l'égalité des 3 pentes, et en déduire que f($a_n$) et f($c_n$) tendent vers f(b)*

**<u>Exercice :</u>**
Soit f convexe sur I. Montrer que si f admet un minimum local $y_0$, alors c'est un minimum global.

5) Proposition
Si f est dérivable, alors f est convexe si et seulement si f ' est croissante.
Dans le cas où f est deux fois dérivable, alors f est convexe si et seulement si f ''≥0

*Démonstration : Utiliser la propriété de la pente.*

6) Exercice : Soit f dérivable et convexe et $x_0$, $y_0 \in$ I avec $x_0 < y_0$, alors :
$f'(x_0) \leq \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq f'(y_0)$

7) Définition : **Si f est dérivable en $x_0$, $x_0$ est un point d'inflexion pour f si la tangente au point ($x_0$,f($x_0$)) traverse la courbe représentative de f en ce point.**

La courbe opère un changement de concavité. En particulier, si f est deux fois dérivable en $x_0$ et si $x_0$ est un point d'inflexion de f, $f''(x_0)=0$.

Réciproquement, si $f''$ s'annule en changeant de signe en $x_0$, alors $x_0$ est un point d'inflexion de f.

8) Position par rapport à la tangente
**Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, alors :** $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$

*Démonstration : Soit φ la fonction définie sur I par φ(x)=* $f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$*. Comme f dérivable, alors φ dérivable et φ'(x)=*$f'(x)-f'(a)$*,*
*Or f est convexe donc f ' est croissante, ainsi pour x≤ a, φ'(x) ≤0 et pour x≥ a, φ'(x)≥0, ainsi a est un minimum pour φ et* $\varphi(a)=0$

Etude d'un exemple :
Démontrer que la fonction sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$
Ecrire l'équation de la tangente à la courbe en x=0
En déduire l'inégalité : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq x$
A l'aide de la corde reliant (0,sin(0)) et $(\frac{\pi}{2},\sin(\frac{\pi}{2}))$, justifier que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x$