

Exercice n°1

/4

1. a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
b) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$
2. f est constante sur $\mathbb{R}$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
4. $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall m_0 \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$ et $|u_m - \ell| > \varepsilon$

Exercice n°2

/4

1. $\Rightarrow$ On suppose que $A \cup B = B \cap C$.
On veut montrer $A \subset B \subset C$.
 - Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$,
alors $x \in B \cap C$,
alors $x \in B$.
Donc $A \subset B$.
 - Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$,
alors $x \in B \cap C$,
alors $x \in C$.
Donc $A \subset C$.Et $A \subset B \subset C$. (1)

 $\Leftarrow$ On suppose que $A \subset B \subset C$.
Donc $A \cup B = B$ et $B \cap C = B$, d'où $A \cup B = B \cap C$. (1)
2. $\Rightarrow$ On suppose que $A \setminus B = A$.
On veut montrer $B \setminus A = B$.
On commence par montrer que $B \setminus A \subset B$:
Soit $x \in B \setminus A$, $x \in B$ et $x \notin A$, donc $x \in B$!
Puis on montre que $B \subset B \setminus A$:
Soit $x \in B$. Si $x \in B$ alors $x \notin A$, sinon, comme $A \setminus B = A$, on aurait $x \in A \implies x \in A \setminus B$ et $x \in B$!
Ainsi $B \setminus A = B$. (1)

 $\Leftarrow$ L'autre sens est exactement le même en changeant A et B . (1)

Exercice n°3

/4

1. a) $\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}$ (1)
b) **Par récurrence**
Initialisation : pour $m = 1, x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Hérédité : on suppose que, jusqu'au rang $m, x^m + \frac{1}{x^m} \in \mathbb{Z}$.

$$\underbrace{x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

Donc $x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} \in \mathbb{Z}$. (1,5)

2. $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
f	$-\infty$	-2	$-\infty$	2	$+\infty$

(1,5)

3. Par exemple : $x = 1$ ou $x = -1$.

(0,5) (Bonus)

Exercice n°4

/4

1. $u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8$

(1)

2. Il semble que $u_m = 2^m$.

(1)

3. Vrai pour $m = 1, 2, 3$.

On suppose que $u_m = 2^m$ pour $m \geq 1$.

$$u_{m+1} = u_1 + \dots + u_m = 2 + \dots + 2^m = 2 \times \frac{1 - 2^{m+1}}{1 - 2}$$

$$u_{m+1} = 2 + 2(2^m - 1) = 2 + 2^{m+1} - 2 = 2^{m+1}$$

(2)

C.Q.F.D. : $u_m = 2^m$.

Exercice n°5

/4

1. $x^m - x^{m+1} = x^m(1 - x)$

Or $0 \leq x^m \leq 1$ et $0 \leq 1 - x \leq 1$,

donc $0 \leq x^m(1 - x) \leq 1$.

2. **Sur** $I = [1, +\infty[$:

$$x^2 - x + 1 \geq x - 1 \iff x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

$\Delta < 0$ donc $x^2 - 2x + 2$ est de signe constant, ici positif.

$$S_1 = [1, +\infty[$$

Sur $] -\infty, 1]$:

$$x^2 - x + 1 \geq -x + 1 \iff x^2 \geq 0, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

$$S_2 =] -\infty, 1]$$

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$.