

DS 1 – Réduction

Deuxième année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai

M. Calciano

Exercice n°1 sur 4 points

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$$

et on note

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice J ? Diagonaliser la matrice J sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.
2. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice n°2 sur 3 points

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel réel H .

1. Soit μ une valeur propre de g . Montrer que μ^2 est valeur propre de $g^2 = g \circ g$.
2. Démontrer que deux sous-espaces propres de g associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe (H n'étant pas, nécessairement, cette somme directe !)
3. Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients réels. Exprimer, sans démonstration, $\det(-A)$ et $\det(A^T)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice n°3 sur 4 points

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{aligned}\phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MB - BM.\end{aligned}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B .
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Problème sur 9 points

On considère un entier naturel n non nul, l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f représenté par rapport à la base e par la matrice A définie par :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 1°) a) Montrer que la matrice A admet deux valeurs propres distinctes α et β (on choisira $\alpha > \beta$).
- b) Montrer que les sous-espaces propres E_α et E_β sont de dimension 1 et déterminer e'_1 et e'_2 deux vecteurs propres de f pour les valeurs propres α et β respectivement.
- 2°) On pose $e'_3 = e_1$. Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .
- 3°) Déterminer la matrice T de f par rapport à la base e' .
- 4°) Résoudre le système différentiel suivant :

$$(s) : \begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + 2y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$