

DS – Réduction

Corrigé

M. Calciano
INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai

Exercice n°1

(/4)

On considère

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1) Rang et diagonalisation de J (sans calcul de déterminant). Les trois lignes (colonnes) de J sont identiques et non nulles, donc $\text{rg}(J) = 1$.

Par le théorème du rang, $\dim \ker J = 3 - \text{rg}(J) = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de J , de sous-espace propre $E_0 = \ker J$ de dimension 2.

De plus J est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral) – ou, sans invoquer ce théorème : comme $\dim E_0 = 2$ égale déjà la multiplicité maximale disponible pour les deux premières valeurs propres, il reste une troisième valeur propre μ , nécessairement de multiplicité 1, et

$$\text{tr}(J) = 0 + 0 + \mu = 3 \implies \mu = 3.$$

Un vecteur propre associé est $(1, 1, 1)$ (en effet $J(1, 1, 1)^T = (3, 3, 3)^T = 3(1, 1, 1)^T$).

On a donc $\dim E_0 + \dim E_3 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc

$J \text{ est diagonalisable, semblable à } \text{diag}(0, 0, 3).$

2) La matrice A est semblable à une matrice diagonale. On remarque que

$$A = aJ + bI_3$$

(chaque coefficient diagonal de A vaut $a + b$, chaque coefficient extra-diagonal vaut a).

Comme $J = P \text{diag}(0, 0, 3) P^{-1}$ pour une certaine $P \in GL_3(\mathbb{R})$, on obtient, avec la *même* matrice P :

$$P^{-1}AP = a P^{-1}JP + bI_3 = a \text{diag}(0, 0, 3) + bI_3 = \text{diag}(b, b, 3a + b).$$

Donc

$A = P \text{diag}(b, b, 3a + b) P^{-1}$

et A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(b, b, 3a + b)$.

Exercice n°2

(/3)

Soit g un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .

1) Si μ est valeur propre de g , alors μ^2 est valeur propre de g^2 . Soit $x \neq 0$ tel que $g(x) = \mu x$. Alors

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(\mu x) = \mu g(x) = \mu(\mu x) = \mu^2 x.$$

Comme $x \neq 0$, μ^2 est bien valeur propre de g^2 (de vecteur propre x).

2) Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de g , et E_λ, E_μ les sous-espaces propres associés. Montrons $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ (ce qui équivaut, pour deux sous-espaces, à $E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu$).

Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$. Alors $g(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$, donc $(\lambda - \mu)x = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a $x = 0$. Donc $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$, d'où

$$E_\lambda \oplus E_\mu.$$

3) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$:

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A), \quad \det(A^T) = \det(A).$$

Exercice n°3

(/4)

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$.

1) Pour tout $k \geq 0$: $A^k B - BA^k = kA^k$. Récurrence sur k .

Initialisation ($k = 0$) : $A^0 B - BA^0 = B - B = 0 = 0 \cdot A^0$. Vrai.

Hérédité : supposons $A^k B - BA^k = kA^k$ pour un certain $k \geq 0$. Alors, en utilisant $AB = BA + A$:

$$\begin{aligned} A^{k+1} B &= A(A^k B) = A(BA^k + kA^k) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= ABA^k + kA^{k+1} \\ &= (BA + A)A^k + kA^{k+1} \quad (\text{car } AB = BA + A) \\ &= BA^{k+1} + A^{k+1} + kA^{k+1} \\ &= BA^{k+1} + (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc $A^{k+1} B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

$$\forall k \geq 0, \quad A^k B - BA^k = kA^k.$$

2) $\varphi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto MB - BM$ est un endomorphisme. φ_B est clairement à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi_B(\lambda M + N) = (\lambda M + N)B - B(\lambda M + N) = \lambda(MB - BM) + (NB - BN) = \lambda \varphi_B(M) + \varphi_B(N).$$

Donc φ_B est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Si $A^k \neq 0$, alors k est valeur propre de φ_B . D'après la question 1 :

$$\varphi_B(A^k) = A^k B - BA^k = kA^k.$$

Donc A^k est un vecteur propre de φ_B associé à la valeur propre k , à condition que $A^k \neq 0$ (un vecteur propre est par définition non nul). D'où le résultat.

4) **Il existe $k > 0$ tel que $A^k = 0$.** Supposons par l'absurde que $A^k \neq 0$ pour tout $k \geq 0$. D'après la question 3, tout entier $k \geq 0$ serait alors valeur propre de φ_B . Or φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, espace de dimension finie n^2 : il possède donc au plus n^2 valeurs propres distinctes. Contradiction avec l'existence d'une infinité de valeurs propres $\{0, 1, 2, \dots\}$.

$$\boxed{\exists k \geq 1 \text{ tel que } A^k = 0 \quad : A \text{ est nilpotente.}}$$

Problème

(/9)

$E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$; $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans e par

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°) a) **A admet deux valeurs propres distinctes.**

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & x-2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix}.$$

On développe par rapport à la troisième ligne (un seul terme non nul) :

$$\chi_A(x) = (x-3) \det \begin{pmatrix} x-1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x-2 \end{pmatrix} = (x-3) \left[(x-1)(x-2) + \frac{1}{4} \right].$$

Or $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, donc

$$\chi_A(x) = (x-3) \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) = (x-3) \left(x - \frac{3}{2} \right)^2.$$

Ainsi A admet deux valeurs propres distinctes :

$$\boxed{\alpha = 3 \quad (\text{simple}), \quad \beta = \frac{3}{2} \quad (\text{double}), \quad \alpha > \beta.}$$

b) **Les sous-espaces propres E_α et E_β sont de dimension 1.** Pour $\alpha = 3$: on résout $(A - 3I_3)X = 0$, soit

$$\begin{cases} -2x + \frac{1}{2}y + 2z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $y = \frac{z-x}{2}$; en reportant dans la première on obtient $x = z$, puis $y = 0$.
Donc

$$E_\alpha = \text{vect}(e'_1), \quad e'_1 = (1, 0, 1),$$

qui est bien de dimension 1 (la multiplicité algébrique de α étant 1, on a de toute façon $1 \leq \dim E_\alpha \leq 1$).

Pour $\beta = \frac{3}{2}$: on résout $(A - \frac{3}{2}I_3) X = 0$, soit

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $z = 0$, puis les deux premières se réduisent à $x = y$. Donc

$$E_\beta = \text{vect}(e'_2), \quad e'_2 = (1, 1, 0),$$

qui est de dimension 1 (bien que β soit valeur propre double : la dimension géométrique est ici strictement inférieure à la multiplicité algébrique).

2°) La famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec $e'_3 = e_1 = (1, 0, 0)$, est une base de E .

$$\det(e'_1, e'_2, e'_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

(en développant par rapport à la deuxième ligne). La famille e' est donc libre, et comme $\dim E = 3$, c'est une base de E .

3°) Matrice T de f dans la base e' . Comme e'_1, e'_2 sont des vecteurs propres :

$$f(e'_1) = 3e'_1, \quad f(e'_2) = \frac{3}{2}e'_2.$$

Reste à exprimer $f(e'_3) = f(e_1) = Ae_1$ (première colonne de A) dans la base e' :

$$Ae_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0).$$

On cherche (a, b, c) tel que $a e'_1 + b e'_2 + c e'_3 = (1, -\frac{1}{2}, 0)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ a = 0 \end{cases} \implies a = 0, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{2}.$$

Donc $f(e'_3) = -\frac{1}{2}e'_2 + \frac{3}{2}e'_3$, et

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4°) Résolution du système différentiel

$$(s) : \begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + 2y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire $X' = AX$ avec $X = (x, y, z)^T$.

On pose $P = (e'_1 \mid e'_2 \mid e'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = PY$, $Y = (p, q, r)^T$ les coordonnées dans la base e' . Alors $A = PTP^{-1}$, donc

$$X' = AX \iff PY' = PTP^{-1}(PY) = PTY \iff Y' = TY,$$

soit

$$\begin{cases} p' = 3p \\ q' = \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}r \\ r' = \frac{3}{2}r \end{cases}$$

Résolution en cascade :

- $r' = \frac{3}{2}r \implies r(t) = C e^{\frac{3}{2}t}$, $C \in \mathbb{R}$.
- $p' = 3p \implies p(t) = A e^{3t}$, $A \in \mathbb{R}$.
- $q' - \frac{3}{2}q = -\frac{1}{2}r(t) = -\frac{C}{2}e^{\frac{3}{2}t}$: équation linéaire d'ordre 1 avec second membre résonant (même exposant $\frac{3}{2}$ que l'équation homogène). On cherche une solution particulière de la forme $q_p(t) = D t e^{\frac{3}{2}t}$:

$$q'_p = D e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{2} D t e^{\frac{3}{2}t}, \quad q'_p - \frac{3}{2} q_p = D e^{\frac{3}{2}t} \stackrel{!}{=} -\frac{C}{2} e^{\frac{3}{2}t} \implies D = -\frac{C}{2}.$$

D'où $q(t) = \left(B - \frac{C}{2}t\right) e^{\frac{3}{2}t}$, $B \in \mathbb{R}$.

Retour à (x, y, z) via $X = PY$, c'est-à-dire $x = p + q + r$, $y = q$, $z = p$:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = A e^{3t} + \left(B + C - \frac{C}{2}t\right) e^{\frac{3}{2}t} \\ y(t) = \left(B - \frac{C}{2}t\right) e^{\frac{3}{2}t} \\ z(t) = A e^{3t} \end{cases} \quad (A, B, C) \in \mathbb{R}^3.}$$

(On vérifie sans peine, en réinjectant dans (s), que ces expressions conviennent bien.)