

Chapitre 5 : Les complexes (2)

M. Calciano

I. Formules d'Euler, de Moivre, linéarisation

II. Racines n -ièmes de l'unité

I. Formules d'Euler, de Moivre, linéarisation

Formule d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application : linéariser des puissances

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en développant avec la formule du binôme de Newton

$$\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n \quad \text{ou} \quad \sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n,$$

et en regroupant les termes deux à deux, on obtient une expression de $\cos^n \theta$ (ou de $\sin^n \theta$ si n est pair) en fonction des $\cos(k\theta)$, et une expression de $\sin^n \theta$ si n est impair en fonction des $\sin(k\theta)$, pour $0 \leq k \leq n$.

On dit qu'on a **linéarisé** l'expression.

Exercice : Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

On a :

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{2^3} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} e^{ik\theta} e^{-i(3-k)\theta} \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &\quad \text{(il est conseillé d'utiliser le triangle de Pascal...)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{(2i)^3} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (-1)^{3-k} e^{ik\theta} e^{-i(3-k)\theta} \\ &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta} e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{-1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = \frac{-1}{4} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta) = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta). \end{aligned}$$

Techniques annexes

Pour linéariser $\cos^n(\theta) \sin^m(\theta)$, on remplace $\cos \theta$ par $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta$ par $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, puis on développe.

Technique de l'arc-moitié. On peut factoriser une expression du type $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

Exemple. Soient p et q deux nombres réels ; factoriser $e^{ip} + e^{iq}$.

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Formule de Moivre

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, soit :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et passage à l'inverse pour n négatif.

Exercice : Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3000}$.

On a :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3000} = \left(e^{i\pi/3}\right)^{3000} = e^{1000i\pi} = (-1)^{1000} = 1.$$

Application de la formule de Moivre

Exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ ou $\sin \theta$.

Exemple. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$, et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin \theta$.

$$\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(e^{3i\theta}) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$\sin(3\theta) = \operatorname{Im}(e^{3i\theta}) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

II. Racines n -ièmes de l'unité

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si z désigne un nombre complexe, on appelle **racine n -ième** de z tout complexe Z tel que $Z^n = z$.

Les racines n -ièmes de 1 sont également appelées **racines n -ièmes de l'unité**. L'ensemble de ces racines est noté $\mathcal{U}_n$.

Proposition

Il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité, qui sont les complexes

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Démonstration. Les solutions sont clairement de module 1. L'ensemble des racines n -ièmes de 1 est de la forme $\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$ (il suffit de revenir à l'écriture exponentielle).

Montrons que $\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k = e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$. L'inclusion $\supset$ est évidente.

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$; posons $q = \lfloor k/n \rfloor$ et $r = k - nq$. Par définition, $q \leq k/n < q+1$ et $0 \leq r < n$, et $e^{2i(r+nq)\pi/n} = e^{2ir\pi/n} e^{2iq\pi} = e^{2ir\pi/n} = \omega_r$, ce qui établit l'inclusion $\subset$.

Vérifions enfin que deux racines d'indices distincts dans $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ sont bien distinctes. Pour $k, k' \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $e^{2ik\pi/n} = e^{2ik'\pi/n}$ si et seulement si $k - k' = nq$ pour un certain entier q . Comme k et k' appartiennent à $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $|k - k'| < n$, donc nécessairement $q = 0$, c'est-à-dire $k = k'$. On remarque également qu'il suffit de prendre n valeurs d'entiers consécutifs.

Proposition

Soit $n \geq 2$ un entier. Si ω est une racine n -ième de l'unité différente de 1, alors :

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

En particulier, la somme des racines n -ièmes de l'unité est égale à 0 (on prend $\omega = \omega_1 \neq 1$, dont les puissances $\omega_1^k = \omega_k$ sont les racines n -ièmes de l'unité).

Démonstration. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$ et de

$$\text{premier terme } 1 : \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0.$$

Proposition

Soit z un complexe. Si Z_0 est une racine n -ième de z , alors l'ensemble de toutes les racines n -ièmes de z est :

$$\{Z_0 \omega \mid \omega \in \mathcal{U}_n\}.$$

Démonstration. Pour $z = 0$, c'est évident. Sinon, l'équation $Z^n = z$ s'écrit également $Z^n = Z_0^n$. Comme $Z_0 \neq 0$, cela équivaut à $\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^n = 1$, soit $\frac{Z}{Z_0} = \omega_k$ pour un certain $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Corollaire

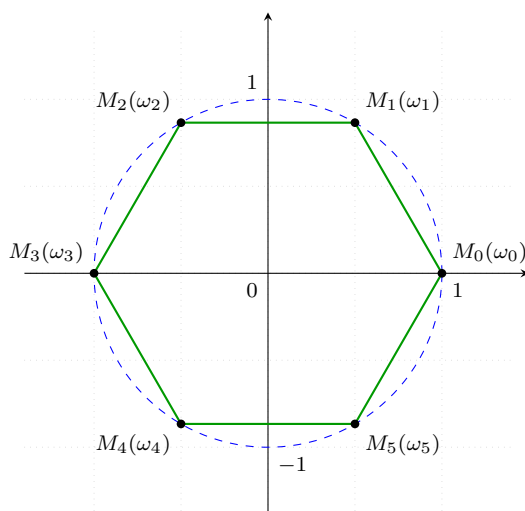
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ . Le complexe z admet exactement n racines n -ièmes, qui sont les complexes :

$$Z_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Démonstration. On applique la proposition précédente avec $Z_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$.

Interprétation géométrique des racines n -ièmes de l'unité

Les n racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité, dont l'un des sommets est 1.



Les images des racines n -ièmes de l'unité sont disposées régulièrement sur le cercle trigonométrique (sur la figure, $n = 6$). Elles sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

$$\mathcal{U}_6 = \left\{ e^{i\frac{0\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{6}}, e^{i\frac{4\pi}{6}}, e^{i\frac{6\pi}{6}}, e^{i\frac{8\pi}{6}}, e^{i\frac{10\pi}{6}} \right\} = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, j, -1, j^2, e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}, \quad j = e^{2i\pi/3}.$$

Exercices**Exercice n°1**

Linéariser $\sin^4 x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2

Calculer les racines quatrièmes de $28 - 96i$.

Exercice n°3

Soient α et β deux réels, avec $\beta \not\equiv \pi [2\pi]$. Mettre sous forme algébrique :

$$A = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{50} \quad \text{et} \quad B = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \beta + i \sin \beta}.$$

Exercice n°4

Soit n un entier non nul.

1. Déterminer le module et un argument de $(1 + i)^n$.

2. En déduire $S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$.

3. Et $S' = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.

Exercice n°5

Soit n un entier non nul, et $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ les racines n -ièmes de l'unité.

1. Calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que, si $n \geq 3$, $\sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \xi_k \xi_\ell = 0$.

Exercice n°6

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, simplifier $B_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \cos^k x$.

Exercice n°7

<https://youtu.be/nHkn0ifpLMQ>

Soit n un entier non nul. Calculer le produit des racines n -ièmes de 1.

Exercice n°8

Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

Exercice n°9

1. Résoudre de deux façons l'équation $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$.

2. En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{5}$.

Exercice n°10

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire une expression de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Exercice n°11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$,
2. $(z+1)^n = (1-z)^n$.

Exercice n°12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} \theta \sin^{2p} \theta, \\ \sin(n\theta) &= \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1} \theta \sin^{2p+1} \theta.\end{aligned}$$

2. On suppose $\theta \neq \frac{\pi}{2} + \ell\pi$ et $n\theta \neq \frac{\pi}{2} + \ell\pi$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. En déduire une expression de $\tan(n\theta)$ en fonction de $\tan \theta$ et n .

Exercice n°13

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Soit $n \geq 2$ un entier, et $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les racines n -ièmes de l'unité. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$ en fonction de n .