Devoir Surveillé n°2

INP1 – Cambrai – 2025/2026

M. Calciano

Exercice n°1 (3 points)

Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 2 \\ 3x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice n°2 (3 points)

Soit n un entier naturel non nul, calculer :

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i$

2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i+1} 2^i$

Exercice n°3 (5 points)

Soit un entier naturel n, on pose

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k a_{n-k}.$$

1) Montrer que : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}$.

2) En déduire que : $2T_n = nS_n$.

3) Démontrer que : $(n+2)\, a_{n+1} = 2(2n+1)\, a_n$.

4) Bonus: Établir que : $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$.

Exercice n°4 (5 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ d'inconnue z.

2) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on pose $Z = \dfrac{1+iz}{1-iz}$. Pour quels complexes z, Z est-il réel ?

Exercice n°5 (4 points)

On note $(*)$ l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ solution de $(*)$, on a $x^2 + x - 1 = 0$ où $x = z + \dfrac{1}{z}$.

2) Montrer que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est solution de $(*)$.

3) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.