Chapitre 17 : Les développements limités

I. Généralités

1) Définition

Développements limités à l'ordre n de f au voisinage d'un point a

Soit I un intervalle et a$\in \bar{I}$ un point de I ou une extrémité réelle de I, f désigne une fonction définie dans I (éventuellement privé de a).

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout x dans le voisinage de a : $f(x) = P_n(x\text{-}a) + o_a((x\text{-}a)^n)$

C'est-à-dire : $f(x) = a_0 + a_1(x\text{-}a) + a_2(x\text{-}a)^2 + \ldots + a_n(x\text{-}a)^n + o_a((x\text{-}a)^n)$

Ou ce qui revient au même: $f(x) = a_0 + a_1(x\text{-}a) + a_2(x\text{-}a)^2 + \ldots + a_n(x\text{-}a)^n + \varepsilon(x)(x\text{-}a)^n$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

On note $DL_n(f)$ le développement correspondant.

Remarque : La changement de variable x = a+t permet de se ramener au voisinage de l'origine.

Vocabulaire : $P_n(x\text{-}a)$ est la partie régulière du développement limité

$f(x) - P_n(x\text{-}a)$ est le reste du développement limité de f à l'ordre n.

Exemple : Soit $f(x) = 1\text{-}x^2+2x^3+x^3\ln(1+x)$ (définie sur]-1 ;+∞[ )

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$, alors $x^3\ln(1+x) = o(x^3)$

Et : $f(x) = 1\text{-}x^2+2x^3+ o(x^3)$

Remarque n°2 :

Un développement limité est une approximation locale d'une fonction par un polynôme. L'approximation est d'autant plus précise que l'ordre du DL est élevé.

2) Définition

Si I est non majoré, on dit que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de +∞, s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I \cap \mathbb{R}^{+*}$:

On a $f(x) = P_n(\frac{1}{x}) + o_{x\to\infty}(\frac{1}{x^n})$

De façon équivalente: $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o_{x\to\infty}(\frac{1}{x^n})$

3) Formule de Taylor-Young

On suppose que f est C^n sur I et que : a∈I.

Alors f a un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, et de plus pour x dans le voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x\text{-}a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a((x\text{-}a)^n)$$

Démonstration: Récurrence sur n, passage par la dérivée puis par primitivation voir IIc)

4) Propriétés

a) Unicité du DL
Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a, alors le développement limité a une partie régulière unique.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il y en ait 2 avec $(a_0,\dots,a_n)\neq(b_0,\dots,b_n)$
On a : $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$
Soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq b_p$
On a : $\sum_{k=p}^{n} (a_k - b_k) x^k = o(x^n)$
On divise par x^p *et on obtient :* $a_p - b_p = \sum_{k=p+1}^{n} (-a_k + b_k) x^k = o(x^{n-p}) \to 0$
Absurde puisque $a_p - b_p \neq 0$

b) Conséquence de l'unicité :
Soit f une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0,
Si f est paire, alors la partie régulière du DL n'est constituée que de monômes de degré pair
Si f est impaire, alors la partie régulière du DL n'est constituée que de monômes de degré impair

Démonstration : On écrit le DL de f(-x) et on en déduit le résultat par unicité du DL.

Ce corollaire n'admet pas de réciproque. Ainsi une fonction admettant un DL au voisinage de 0 avec une partie régulière paire (resp. impaire), n'a aucune raison d'être paire (resp. impaire), en effet la fonction « se cachant » derrière le $o(x^n)$ n'a aucune parité a priori.

II. Obtention de DL

Tous les théorèmes évoqués dans ce paragraphe sont énoncés à l'origine, les résultats se généralisent par changement de variable du type x=a+t pour un DL au voisinage de a≠0 et un changement du type $x=\frac{1}{t}$ au voisinage de $\pm\infty$

1) Théorème dit de « troncature »
Soit n et p deux entiers naturels tels que $p\leq n$
Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$
Alors f admet un $DL_p(0)$ de la forme : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + o(x^p)$

Démonstration : Evidente !

2) Propriétés
Soit : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n deux polynômes de degré inférieur ou égal à n.

a) Opérations algébriques sur les DL
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $(\alpha f+ \beta g)(x) = (\alpha P_n + \beta Q_n)(x) + o(x^n)$

On a : $(f\times g)(x)= R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le polynôme $P_n\times Q_n$ tronqué à l'ordre n.
Remarque : Si f ne s'annule pas dans un voisinage de 0, alors son inverse admet un $DL_n(0)$ (obtenu comme une composée)

Démonstration :
Soit f(x) = P(x) + $x^n\varepsilon_1(x)$ et g(x) = Q(x) + $x^n\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$
Alors : f(x)g(x) = P(x)Q(x)+x^n(P(x)$\varepsilon_2(x)$ + Q(x) $\varepsilon_1(x)$)
Or P et Q sont polynomiales donc continues donc bornées au voisinage de 0
Et $\lim_{x\to 0} P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) = 0$
D'où : f(x)g(x) = P(x)Q(x)+o(x^n)
Il suffit alors de prendre R(x) la troncature de P(x)Q(x) à l'ordre n…

Exemple : Poursuivre les calculs suivants :
#$(1+t+o(t))(2+3t+4t^2+o(t^2))$
#$(1+t)((2+3t+4t^2+o(t^2))$
#$t((2+3t+4t^2+o(t^2))$

b) Pour les quotients…
#De la forme : $\frac{1}{1-u}$ (théorème admis)
Soit u une fonction telle que : $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, si u admet un DL à l'ordre n en 0, alors : x→ $\frac{1}{1-u(x)}$ admet un DL à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est celle du développement à l'ordre n en 0 de x→ $\sum_{k=0}^{n}(u(x))^k$

#De la forme $\frac{f}{g}$
Soient f et g deux fonctions admettant chacune un DL à l'ordre n en 0, si g a une limite non nulle en 0, alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0
Démonstration :
On a : $\frac{f}{g} = \frac{f}{L}\times\frac{1}{1-(1-\frac{g}{L})}$ *et on applique le résultat précédent…*

Exemple :
Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de x→ $\frac{1}{1+e^x}$
On a : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3))} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)) + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3))^2 + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3))^3$
$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3) = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+ o(x^3)$

Remarque: Une autre technique appelée "division par puissances croissantes » permet d'obtenir le DL sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas en 0. Mais cette technique est HP, elle sera juste vue en exercice.

c) Composée
Soit g une fonction définie sur un intervalle I et admettant un DL à l'ordre n au voisinage d'un point a de I.
Soit f une fonction définie sur g(I) et admettant un DL à l'ordre n au voisinage du point g(a) de I.
Alors fog admet un DL à l'ordre n au voisinage du point a

Et : $(f \circ g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le polynôme $P_n o\, Q_n$ tronqué à l'ordre n.

Attention : Ne pas confondre $P_n \times Q_n$ et $P_n o\, Q_n$

Etude d'un exemple : Déterminer le DL à l'ordre 4 de $x \to \ln(1+\sin(x))$
On écrit le DL de ln : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$
Puis celui de $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
On pose $u = \sin(x)$, et on vérifie bien que u tende vers 0
On a : $\ln(1+u) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6})^3 - \frac{1}{4}(x - \frac{x^3}{6})^4 + o(x^4)$
On poursuit: $= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

d) Primitive
On suppose f continue dans I, soit F une primitive de f sur I alors :
$F(x) = F(0) + \int_0^x P_n(t)dt + o(x^{n+1})$

Démonstration: On part du DL de la dérivée, on l'intègre et on utilise l'unicité du DL…

Exemple : Déterminer le DL en 0 de Arctan à l'ordre 4
On sait que $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Formons le DL en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1+(-x^2)+o(x^3)$
Et : $\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+ o(x^3)$, d'où :
$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4) = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$

e) DL d'une fonction dérivée
On suppose f dérivable dans I, **s'il existe**, le $DL_{n-1}(0)$ de f ' est donné par $f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1})$ avec $P_n(x)$ correspondant au $DL_n(0)$ de f.

Attention : Si une fonction f, dérivable, admet un DL à l'ordre n au voisinage de a, sa dérivée n'admet pas nécessairement un DL à l'ordre n-1. Cependant, si on sait que f ' admet un DL à l'ordre n-1 alors sa partie régulière correspondra à la dérivée de la partie régulière du DL de f.

f) DL d'une fonction réciproque
Si une fonction f admet une réciproque g, comment, sous réserve d'existence, obtenir l'existence du DL de g ?

Etude d'un exemple : Soit f définie par $f(x) = (1+x^2)\ln(1+x)$
Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble à définir.
Soit g la réciproque de f, écrire le DL à l'ordre 3 de g(f(x)) en fonction de celui de g
En exploitant l'expression de g(f(x)), en déduire le DL de g à l'ordre 3.

III. Applications des DL…

1) Signe

Si f possède un DL à l'ordre n en 0 de la forme : $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Si p désigne le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$

Alors : $f(x) \sim_0 a_p x^p$ et si f est réelle, f(x) est du même signe au voisinage de 0 que $a_p x^p$

Démonstration : On a $f(x) = a_p x^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Donc $f(x) = a_p x^p + o(x^p) = a_p x^p + o(a_p x^p)$ *car* $a_p \neq 0$ *donc* $f(x) \sim_0 a_p x^p$

On renvoie au chapitre sur les relations de comparaison pour en déduire que les deux expressions ont le même signe.

2) DL à l'ordre 0

Une fonction f admet un DL en 0 à l'ordre 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0

Si on note $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, alors $f(x) = L + o(1)$

Démonstration : Il suffit de poser $\varepsilon(x) = f(x) - L$

3) DL à l'ordre 1

Soit f une fonction définie en 0

On a : [f dérivable en 0] ⇔[f admet un DL à l'ordre 1 en 0]

Ce DL est alors : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$

Démonstration :

Si f admet un DL à l'ordre 1 en 0, alors : $f(x) = f(0) + a_1 x + o(x)$

Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{a_1 x + o(x)}{x} = a_1 + o(1) \longrightarrow a_1$ *donc f est dérivable et* $f'(0) = a_1$

Réciproquement :

Si f est dérivable en 0, alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \longrightarrow f'(0)$ *d'où :* $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) + o(1)$

Soit : $f(x) = f(0) + xf'(0) + xo(1) = f(0) + xf'(0) + o(x)$

Remarques :

On peut trouver des fonctions admettant des DL à l'ordre n>1 et n'étant pas n fois dérivable.

Exemple :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

Alors $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ or $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ donc $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$

Ainsi f admet un DL à l'ordre 2 mais n'est pas deux fois dérivables.

4) Recherche d'extrema

Etude d'un exercice : Soit f une fonction de classe $C^2(I,\mathbb{R})$

On suppose qu'il existe x_0 tel que : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$

Montrer alors que si $f''(x_0) < 0$, *alors f possède un maximum local en* x_0 et un minimum local dans le cas contraire.

5) Etude des branches infinies

On dit que la courbe représentative C_f de f possède **une branche infinie** lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Dans ce cas, plusieurs possibilités se présentent :

#Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C_f admet une branche parabolique horizontale.

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

#Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que C_f admet une branche parabolique verticale

Exemple : $f(x) = x^2$

#Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ où $a \in \mathbb{R}^*$,

Si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dit que C_f admet une branche parabolique oblique d'équation y=ax

Exemple : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

Si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \text{ avec } b \in \mathbb{R}$, on dit que C_f admet une asymptote oblique d'équation y=ax+b

Exemple : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$

Le signe de f(x)-(ax+b) donne les positions relatives de C_f et de l'asymptote.

Exercice : Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

a) Montrer que $f(x) \sim_{\infty} x$
b) Puis que $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ (on posera $u = \frac{1}{x}$ mais pas trop vite…)
c) En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe représentative et sa position.

IV. Catalogue des développements limités classiques :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$.
- $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$.
- $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.