Chapitre 6 : Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

M. Calciano

I. Généralités

Une équation est dite différentielle lorsqu'il s'agit d'une équation faisant intervenir les dérivées d'une fonction « y » à déterminer.
Elle est dite du premier ordre lorsque parmi les dérivées, seule la dérivée première intervient, et linéaire car sans puissance ni sur y ni sur y'

Dans tout le chapitre, on désigne par K, le corps des réels ou des complexes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $b : I \to K$ une application continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$, et $y : J \to K$ une application.
On dit que y est solution sur J de l'équation différentielle (E) du premier ordre :

$$y' + ay = b$$

si et seulement si y est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad y'(x) + ay(x) = b(x).$$

Lorsque l'application a est constante comme ici, on parle d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

À chaque équation (E), on peut associer une équation (E_0) dite équation homogène à (E) définie par :

$$y' + ay = 0.$$

Résoudre (E), c'est déterminer pour chaque intervalle $J \subset I$, l'ensemble des solutions de (E) sur J.

II. Résolution

1) Résolution de (E_0)

Soit S_0 l'ensemble des solutions de E_0 sur I, alors

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-ax}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Démonstration : Puisque a est constante, a admet des primitives dont l'expression est $ax +$ cste.
Pour $y : I \to K$ dérivable, on définit z par $z(x) = e^{ax}y(x)$ (clairement z est dérivable).
Pour tout x de I :

$$y'(x) = -ae^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y \in S_0 &\iff \forall x \in I,\ y'(x) + ay(x) = 0 \\ &\iff -ae^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x) + ae^{-ax}z(x) = 0 \\ &\iff e^{-ax}z'(x) = 0 \iff z' = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in K,\ \forall x \in I,\ z(x) = \lambda. \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-ax}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Exercice n°1 : Résoudre $y' - 4y = 0$.
Il s'agit d'une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficient constant dont les solutions sont : $y(x) = \lambda e^{4x}$ avec $\lambda \in K$.

Remarque : La démonstration précédente reste valable avec a non constante, et alors :

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-\int a(x)dx}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Que penser de la résolution : $y' = ay \iff \frac{dy}{dt} = ay$ *?*
Donc $\frac{dy}{y} = adt$ *et* $\ln(y) = at + cste$*, soit* $y = e^{at+cste} = Ae^{at}$*. Alors...*
On divise par y sans s'assurer que y pourrait s'annuler.
On intègre en $\ln(y)$ *alors qu'il s'agit de* $\ln|y|$*. Enfin, la constante A devrait être strictement positive...*

2) Résolution « théorique » de (E)

a) Lien entre (E) et (E_0) :

$$\forall y_1, y_2 \in S, \quad y_1 - y_2 \in S_0.$$

Démonstration : On a $y_1' + ay_1 = b$ *et* $y_2' + ay_2 = b$*, donc* $y_1' - y_2' + ay_1 - ay_2 = b - b = 0$.

b)

$$\forall y_1 \in S,\ \forall y_0 \in S_0, \quad y_1 + y_0 \in S.$$

Ainsi, si S n'est pas vide, alors S est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle S_0 :

$$S = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in S_0\}.$$

Autrement dit : la « solution générale » de (E) est la somme d'une « solution particulière » de (E) et de la « solution générale » de (E_0).

Démonstration : de la même façon qu'au a).

Conséquence importante : Pour résoudre notre équation différentielle, il suffira de résoudre l'équation différentielle linéaire associée puis de déterminer une solution particulière.

c) Superposition des solutions

On résout d'abord (E_0) puis on détermine une solution particulière de (E). Pour l'obtention de la solution particulière de (E), il se peut que la solution soit « évidente ».
Il se peut aussi que le second membre b se décompose en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions : $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$.
On détermine alors une solution particulière pour chaque équation (E_k) : y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ fournit une solution particulière de (E). En effet :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Ce principe est appelé le **principe de superposition des solutions**.

3) Avec des seconds membres particuliers...

a) Second membre de la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$

On peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.

Exercice n°2 : Résoudre l'équation $(E_1) : y' + 2y = e^{2x} + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + y = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Pour (E_1), on va utiliser le principe de superposition des solutions.
- On résout d'abord l'équation homogène associée : $y' + 2y = 0$ qui a pour solution $y(x) = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- On cherche une solution particulière de $(E_1') : y' + 2y = e^{2x}$. Une solution particulière y_0 est de la forme $y_0(x) = P(x)e^{2x}$. De $y_0' + 2y_0 = e^{2x} \iff P'(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} = e^{2x}$, soit $P'(x) + 4P(x) = 1$. P est donc de degré 0, c'est une constante et $P(x) = \frac{1}{4}$. D'où $y_0(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$.
- On cherche une solution particulière de $(E_1'') : y' + 2y = e^{-x}$. $y_0(x) = P(x)e^{-x}$. De $y_0' + 2y_0 = e^{-x} \iff P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + 2P(x)e^{-x} = e^{-x}$, soit $P'(x) + P(x) = 1$. P est constant, $P(x) = 1$. D'où $y_0(x) = e^{-x}$.
- Finalement, les solutions de (E_1) :

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + e^{-x} + \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour $(E_2) : y' + y = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- Équation homogène : $y' + y = 0$ donne $y(x) = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = P(x)e^x$. On a $y_0' + y_0 = x^2e^x \iff P'(x)e^x + P(x)e^x + P(x)e^x = x^2e^x$, soit $P'(x) + 2P(x) = x^2$. P est de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$. Par identification :

$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$$

D'où $y_0(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$.
Finalement :

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Second membre avec des fonctions circulaires

Étude d'un exemple : résoudre $y' + y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Première possibilité : On cherche une solution particulière de la forme $A\cos + B\sin$ avec A, B réels.
- Équation homogène : $y' + y = 0$ donne $y = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Alors $y_0' + y_0 = -A\sin(x) + B\cos(x) + A\cos(x) + B\sin(x) = (B - A)\sin(x) + (A + B - 1)\cos(x) = 0$. Pour $x = 0$: $A + B - 1 = 0$, pour $x = \pi/2$: $B - A = 0$, d'où $A = B = 1/2$. Donc $y_0(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.

Finalement : $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \lambda e^{-x}$.

Deuxième possibilité : on bascule en complexe. On résout $y' + y = e^{ix}$ et on conserve la partie réelle.
- Équation homogène : $y = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = P(x)e^{ix}$ avec P polynôme complexe. On a $P'(x)e^{ix} + iP(x)e^{ix} + P(x)e^{ix} = e^{ix} \iff P'(x) + (1 + i)P(x) = 1$. Donc P est constant : $P(x) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. D'où $y_0(x) = \frac{1-i}{2}e^{ix}$.

Les solutions complexes : $y(x) = \frac{1-i}{2}e^{ix} + \lambda e^{-x} = \frac{1-i}{2}(\cos x + i\sin x) + \lambda e^{-x} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{i}{2}(\sin x - \cos x) + \lambda e^{-x}$.
En prenant la partie réelle, on retrouve $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \lambda e^{-x}$.

c) Méthode de variation de la constante

En notant y_0 une solution non nulle de (E_0), la méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où λ est une nouvelle fonction inconnue (dérivable sur I, $I \to K$). On a :

$$y' + ay = b \iff \lambda' y_0 + \lambda y_0' + a\lambda y_0 = b \iff \lambda' y_0 = b.$$

On en déduit λ par primitivation.

Exemple : Résoudre $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$.
L'équation homogène associée a pour solution Ae^{-x}. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = A(x)e^{-x}$. On obtient $A'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$, soit $A'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $A(x) = \ln(1+e^x)$. D'où :

$$y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + Ae^{-x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

III. Illustration en physique

1) Les équations rencontrées en Physique :

a) Échange thermique : $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$.

b) Charge/décharge d'un condensateur à travers une résistance : $U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$.

c) Chute libre d'un corps : $m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$.

d) Réaction chimique : $\frac{dC}{dt} = -kC$.

2) Étude d'une équation avec second membre de type sinusoïdal

Résoudre : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$.
Méthode : voir exercices.
Remarque : La solution particulière $\frac{A_0}{1+w^2\tau^2}(\cos(wt) + w\tau\sin(wt))$ peut s'écrire sous la forme d'un cosinus « déphasé » :

$$\frac{A_0}{\sqrt{1+w^2\tau^2}}\cos(wt - \varphi), \quad \varphi = \arctan(w\tau).$$

IV. Exercices

Exercice n°1

a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2y = -4$.

b) Déterminer celle(s) vérifiant $y(1) = -3$.

a) Déterminer les solutions de $2y' - 3y = 9$.

b) Déterminer celle(s) vérifiant $y'(1) = 1$.

3) De façon générale, l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec a constante et b fonction continue sur $\mathbb{R}$, a combien de solutions vérifiant la condition fixée $y(x_0) = y_0$?

Exercice n°2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2. $y' + y = xe^{-x}$
3. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Exercice n°3 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ de deux façons différentes.

Exercice n°4 (autocorrection) Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $2y' - y = \cos(2x)$
2. $-y' + 4y = 3e^{2x} + xe^{-x}$
3. $y' = 2y + (2x^2 - 1)e^{x^2}$

On obtient :

1. $y = -\frac{1}{17}\cos(2x) + \frac{4}{17}\sin(2x) + Ae^{2x},\ A \in \mathbb{R}$
2. $y = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{25}\right)e^{-x} + \frac{3}{2}e^{2x} + Ae^{4x},\ A \in \mathbb{R}$
3. $y = (x+1)e^{x^2} + Ae^{2x},\ A \in \mathbb{R}$

Exercice n°5 L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice n°6 La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton : $\theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t))$, où θ_a est la température ambiante, λ une constante de proportionnalité, et t le temps en minutes.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle en fonction de λ et θ_a.
2. Un verre d'eau à 10°C est sorti du réfrigérateur et déposé dans une pièce à 31°C. Après 10 minutes, l'eau est à 17°C. Quel temps écoulé après la sortie pour que l'eau soit à 25°C ?

Exercice n°7 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$ et $f(0) = -4$.
Indication : on posera $g(x) = f(x)f(-x)$.

Exercices n°8 : Les équations de la physique...

1. Échange thermique : résoudre $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$.
2. Charge/décharge d'un condensateur : résoudre $U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$.
3. Chute libre d'un corps : résoudre $m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$.
4. Réaction chimique : résoudre $\frac{dC}{dt} = -kC$.

Exercice n°9 Résoudre $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$. On bascule en complexes : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.
3. En déduire les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.
4. Déterminer les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$.

Exercice n°10

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + xy = x^3$ sur $]0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $xy' + xy = x^3$ sur $]-\infty; 0[$.
3. Peut-on résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$?

Solutions :

1. $y = x^2 - 2x + 2 + Ae^{-x},\ A \in \mathbb{R}$
2. $y = x^2 - 2x + 2 + Be^{-x},\ B \in \mathbb{R}$
3. Oui, $y = x^2 - 2x + 2 + Ae^{-x},\ A \in \mathbb{R}$ (penser à vérifier la continuité en 0, et la dérivabilité en 0, ce qui impose A=B)