Chapitre 8 : Algèbre générale

M. Calciano

I. Relation dans un ensemble

1) Définition

Une **relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E** est une propriété pour certains couples (x, y) de E^2 et fausse pour d'autres.

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$.

— *Exemples :*

— La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

— La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$, $m\mathcal{R}n \iff m$ divise n.

2) Autres définitions

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **réflexive** » si pour tout x de E, $x\mathcal{R}x$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **symétrique** », si pour tout x, y de E, $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **transitive** » si pour tout x, y, z de E, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **antisymétrique** » si pour tout x, y de E, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x = y$.

Remarque : L'antisymétrie n'est pas l'inverse de la symétrie ! Et une relation peut être symétrique et antisymétrique (par exemple la relation $=$).

3) Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence sur un ensemble E**, toute relation réflexive, symétrique et transitive.

4) Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$, une relation d'équivalence sur un ensemble E, et $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence, notée cl(x)**, le sous-ensemble de E constitué des éléments en relation avec x.

Ainsi :

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$$

Remarque n°1 : Soit $(x, y) \in E^2$, muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors, soit $y \in cl(x)$ et $cl(x) = cl(y)$, soit x n'est pas en relation avec y et $cl(x) \cap cl(y) = \varnothing$.

— *Exemple :* On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de congruence : les entiers x et y sont congrus modulo n (entier non nul) si leur différence est un multiple de n :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + kn.$$

Dans ce cas, on note : $x \equiv y\ [n]$. Ainsi $19 \equiv 4\ [5]$, mais aussi $19 \equiv 9\ [5]$, et une infinité d'autres possibilités !

Remarque n°2 : L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$**, et se note $E/\mathcal{R}$.

II. Relation d'un ensemble vers un autre ensemble

1) Définition

Une application f est définie par :

— un ensemble de départ ou de définition E,

— un ensemble d'arrivée F,

— la donnée pour tout x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$ appelé image de x par f.

On parle d'**application** (ou de fonction) de E dans F. On note :

$$f : E \to F, \quad x \mapsto f(x).$$

2) Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

3) Définitions

— Soit E un ensemble et I un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$.

— Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **indicatrice de A** et note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0;1\}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

4) Composée

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g de F dans G. On appelle **composée de f par g**, notée $g \circ f$, l'application de E dans G définie par :

$$g \circ f : E \to G, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

5) Définitions

— **Identité :** Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E, notée Id_E, l'application qui à tout élément x de E associe x.

— **Restriction :** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle **restriction de f à A** et on note $f_{|A}$ l'application $A \to F, x \mapsto f(x)$.

III. Image directe, réciproque

1) Définitions (Rappels)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

— Soit A une partie de E. On appelle **image directe de A par f**, et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

— Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque de B par f**, et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Remarque : À retenir :

— $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$.

— $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Remarque (attention à la notation !) : L'écriture $f^{-1}(B)$ **n'augure en rien du caractère bijectif de f**. L'image réciproque d'une partie B de F est définie pour **toute** application f, bijective ou non : c'est une partie de E (éventuellement vide, ou contenant plusieurs éléments). En revanche, l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ n'existe que si f est bijective. Ainsi, lorsque f n'est pas bijective, $f^{-1}(B)$ a un sens, mais $f^{-1}(y)$ n'a pas de sens en tant qu'élément de E : on écrira $f^{-1}(\{y\})$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (qui n'est ni injective, ni surjective).

— **Images directes :**

  — $f([1;2]) = [1;4]$, car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1;2]$.

  — $f([-1;2]) = [0;4]$: en effet, $0 \in [-1;2]$ donne la valeur 0, et le maximum de x^2 sur $[-1;2]$ est atteint en $x = 2$. Notons que ce n'est **pas** $[1;4]$ ni $[f(-1); f(2)]$.

— **Images réciproques :**

  — $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\} = \{-2;2\}$: deux antécédents, donc f n'est pas injective.

  — $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$: aucun antécédent, donc f n'est pas surjective.

  — $f^{-1}([1;4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 4\} = [-2;-1] \cup [1;2]$.

On remarque que $f^{-1}(f([1;2])) = [-2;-1] \cup [1;2] \neq [1;2]$: en général, $f^{-1}(f(A)) \neq A$ (voir l'exercice n°8).

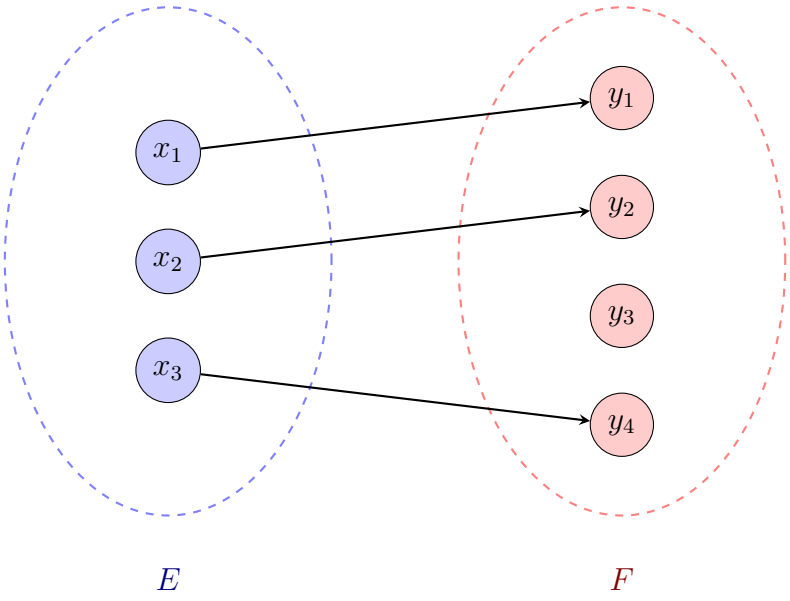
2) Applications injectives, surjectives, bijectives (Rappels)

— **Application injective :** Soit f une application de E dans F. On dit que f est une **application injective ou une injection** lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Remarque : De façon équivalente, f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

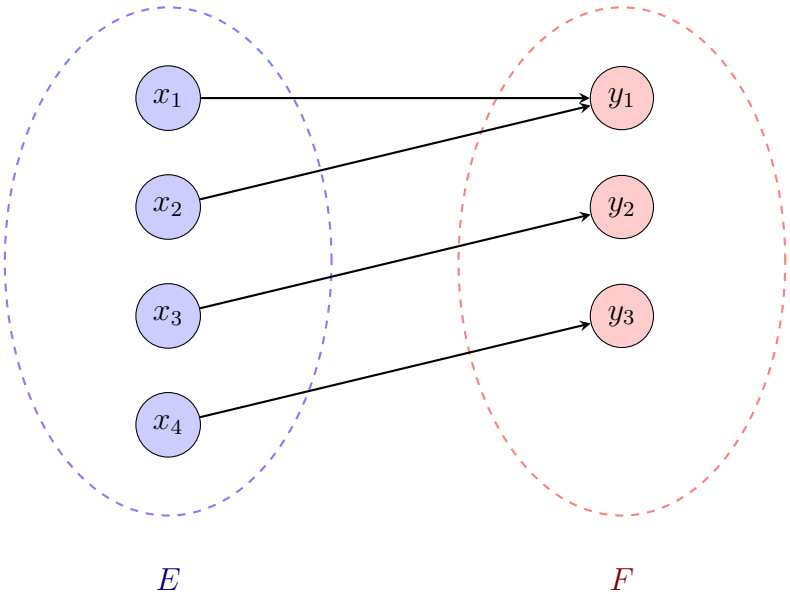


Injection : chaque élément de F a *au plus* un antécédent

Théorème : La composée de deux applications injectives est injective. *Démonstration :* Soient f et g deux applications définies respectivement sur I et J tels que $f(I) \subset J$.
Si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, alors par injectivité de g, on a $f(x) = f(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de f.

— **Application surjective :** Soit f une application de E dans F. On dit que f est une **application surjective ou une surjection** lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$



Surjection : chaque élément de F a *au moins* un antécédent

Théorème : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. *Démonstration :* Soit $z \in G$. Alors il existe un antécédent $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Mais f est surjective, donc il existe un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $z = g \circ f(x)$.

— **Application bijective :** Soit f une application de E dans F. On dit que f est une **application bijective ou une bijection** lorsque f est à la fois injective et surjective. Une autre façon de le dire : tout élément de F possède un unique antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

— **Application réciproque :** Soit f une bijection de E dans F. On appelle **application réciproque ou bijection réciproque** de f, notée f^{-1}, l'application de F dans E qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x de E. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Proposition : Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Théorème : Une application f de E dans F est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E vérifiant :

$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E.$$

On a alors $g = f^{-1}$. *Démonstration :* Soit $x \in E$. Posons $f(x) = y$. Alors $g \circ f(x) = g(y)$, et $x = g(y)$.
Ainsi de $x = g(y)$, on a $f(x) = f \circ g(y)$. Mais $f \circ g(y) = y$ car $f \circ g = Id$.
Et y admet $g(y)$ comme unique antécédent par f.
Théorème : Soit f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G. Alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration : On utilise l'associativité de la composition ! Ainsi :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_E,$$

et on conclut avec la propriété précédente.

3) Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinalité

On suppose ici que E et F sont des ensembles finis.

— Si $f : E \to F$ est injective, alors $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$.

— Si $f : E \to F$ est surjective, alors $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

— Si $f : E \to F$ est bijective, alors $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.

Théorème : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \to F$ une application. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$

Démonstration :

— On suppose f bijective. Alors de façon évidente, f est injective.

— On suppose f injective. Comme $f : E \to f(E)$ est bijective, on a $\text{card}(E) = \text{card}(f(E))$. Si f n'est pas surjective, alors $\text{card}(F) > \text{card}(f(E))$, d'où $\text{card}(E) > \text{card}(f(E))$, absurde.

— On suppose f surjective. On a donc $f(E) = F$, et $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F) = \text{card}(E)$. Si f n'est pas injective, alors $\text{card}(F) < \text{card}(E)$, absurde.

IV. Exercices

Exercice n°1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

2) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{x^2+1}$. (Indication : On constatera que $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x = x^4 + x^2 + (x-1)^2$.)

Exercice n°2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.

1) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice n°3

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3) On suppose que $E = G$ et que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice n°4

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y)$.

1) Montrer que f est bijective.

2) Déterminer $f(\Delta)$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.

3) Déterminer $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice n°5

Soit $f \in F(E, F)$ et $g \in F(F, G)$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

2) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice n°6

Soit E et F deux ensembles.

1) Montrer que $F \subset E \iff E \cap F = F$.

2) Montrer que $F \subset E \iff E \cup F = E$.

Exercice n°7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Déterminer la fonction indicatrice de $A \Delta B$ en fonction de la somme et du produit de celles de A et de B.

3) En déduire que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \varnothing$.

Exercice n°8

Soit A une partie d'un ensemble E et f une application de E dans F :

1) Montrer l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$.

2) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

3) Soit B une autre partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, puis que $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$.

Exercice n°9

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Décrire $\mathcal{P}(E)$.

Exercice n°10

Soit A une partie de E, et $f\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \mapsto X \cap A$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si $A = E$.

2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A = E$.

Exercice n°11

Soit f définie de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

1) Est-ce que f est injective ?

2) Est-ce que f est surjective ?

Exercice n°12

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $x\mathcal{R}y \iff (x - y)(x + y - 1) = 0$.

3) En déduire la classe d'équivalence $cl(x)$ d'un réel x. Pour quelle valeur de x la classe $cl(x)$ est-elle réduite à un seul élément ?

Exercice n°13

Quelle est la différence entre $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$?

Exercice n°14

Soit h réel strictement positif. On pose $J_h =]-h; h[$.

1) Montrer que $\bigcap_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \{0\}$.

2) Montrer que $\bigcup_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \mathbb{R}$.

Exercice n°15

Soit f une application de E dans F, $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F. Montrer que :

1) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

2) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

Première année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai — M. Calciano