Chapitre 3 : Calcul différentiel (1)

M. Calciano

Ce chapitre pose les bases analytiques nécessaires à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles, en prolongeant les notions de limite, de continuité et de dérivabilité vues en première année pour les fonctions d'une seule variable. On commence par les notions topologiques indispensables (normes, ouverts, continuité), puis on étudie les dérivées partielles, la différentiabilité, et les premiers résultats sur les extrema.

I. Topologie des espaces vectoriels normés

a) Normes

Définition I.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

(i) **Séparation :** $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0_E$;

(ii) **Homogénéité :** $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;

(iii) **Inégalité triangulaire :** $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** (EVN).

Remarque : *Une norme généralise la notion intuitive de* longueur *d'un vecteur : $N(x)$ mesure la « taille » de x, et $N(x - y)$ (voir §I.2) mesurera l'écart entre deux points x et y. Les trois axiomes traduisent des propriétés que toute mesure de longueur doit vérifier : seul le vecteur nul est de longueur nulle, dilater un vecteur d'un facteur λ multiplie sa longueur par $|\lambda|$, et le chemin direct de 0 à $x + y$ est plus court que le détour par x.*

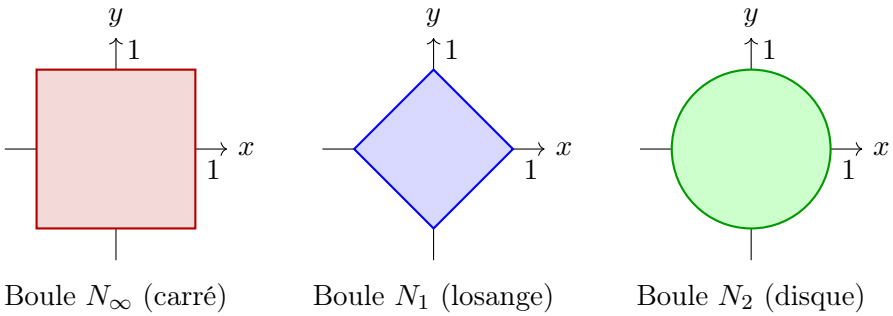
Exemples fondamentaux sur $\mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ces trois applications sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ (vérification laissée en exercice). Par exemple, pour $x = (3, -4)$: $N_1(x) = 7$, $N_2(x) = 5$ (c'est la longueur euclidienne usuelle, ici un triangle 3-4-5), et $N_\infty(x) = 4$.

Exemple à traiter. Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ (il s'agit en fait de N_∞ écrite explicitement en dimension 2).

Seule l'inégalité triangulaire mérite attention : $N(u+v) = \max(|x+x'|, |y+y'|) \leq \max(|x| + |x'|, |y| + |y'|) \leq N(u) + N(v)$.



Boule N_∞ (carré) Boule N_1 (losange) Boule N_2 (disque)

FIGURE 1 – Boules unité des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$. On observe graphiquement l'emboîtement des boules : le losange (boule N_1) est inclus dans le disque (boule N_2), lui-même inclus dans le carré (boule N_∞), traduisant l'inégalité $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$ valable sur $\mathbb{R}^2$ (voir §I.3).

Remarque (Contre-exemple : une application qui n'est pas une norme) : *L'application* $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto |x|$ *vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, mais* pas *la séparation :* $N(0, 1) = 0$ *alors que* $(0, 1) \neq (0, 0)$. *Ce n'est donc pas une norme (on parle de* semi-norme*). Cet exemple rappelle qu'il faut vérifier les* trois *axiomes, et pas seulement l'inégalité triangulaire qui est souvent la seule à demander un vrai calcul.*

b) Distance associée, boules et sphères

Définition I.2. Soit (E, N) un EVN. On appelle **distance associée** l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto N(x - y)$.

Pour $a \in E$ et $r > 0$, on définit :

- **boule ouverte :** $B(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) < r\}$;
- **boule fermée :** $B_f(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$;
- **sphère :** $S(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) = r\}$.
- **distance d'un point à une partie :** pour $A \subset E$ non vide, $d(x, A) = \inf\{N(x - y) \mid y \in A\}$.

Remarque : *La définition de* $d(x, A)$ *est légitime car l'ensemble* $\{N(x - y) \mid y \in A\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{R}^+$*, donc minorée par* 0 *: sa borne inférieure existe bien dans* $\mathbb{R}^+$.

c) Normes équivalentes

Définition I.3. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites **équivalentes** s'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que $\forall x \in E : c\, N_2(x) \leq N_1(x) \leq C\, N_2(x)$.

De manière équivalente, les fonctions N_1/N_2 et N_2/N_1 sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Exemple. Sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq \sqrt{2}\, N_\infty(x, y)$. Les normes N_∞ et N_2 sont donc équivalentes (avec $c = 1$, $C = \sqrt{2}$).

Théorème I.1 (Équivalence des normes en dimension finie, admis)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*- (ou* $\mathbb{C}$*-)espace vectoriel de* dimension finie*. Alors toutes les normes sur* E *sont équivalentes. En particulier, ceci s'applique sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.

Remarque : *Ce théorème est remarquable et propre à la dimension finie : en dimension infinie, deux normes peuvent ne pas être équivalentes Sa conséquence pratique est que toutes les notions topologiques qui suivent (limite, continuité, ouvert...) ne dépendent pas du choix de la norme sur* $\mathbb{R}^n$ *: on pourra donc toujours choisir, parmi* N_1*,* N_2*,* N_∞*, celle qui rend les calculs les plus simples.*

d) Voisinages, ouverts et fermés

Définition I.4. Soit (E, N) un EVN et $a \in E$.

- Une partie $V \subset E$ est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
- Une partie $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de chacun de ses points : $\forall x \in U, \exists r_x > 0,\ B(x, r_x) \subset U$.
- Une partie $F \subset E$ est un **fermé** de E si $E \setminus F$ est un ouvert.

Exemples.

- E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés.
- $[0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, mais $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Proposition I.1. *Dans un EVN* (E, N)*, toute boule ouverte* $B(a, r)$ *est un ouvert de* E*, et toute boule fermée* $B_f(a, r)$ *est un fermé*

Démonstration : Soit $x \in B(a,r)$, c'est-à-dire $N(x-a) < r$. Posons $r_x = r - N(x-a) > 0$. Montrons que $B(x,r_x) \subset B(a,r)$: pour $z \in B(x,r_x)$, l'inégalité triangulaire donne

$$N(z-a) \leq N(z-x) + N(x-a) < r_x + N(x-a) = r.$$

Donc $z \in B(a,r)$. Ainsi tout point de $B(a,r)$ possède une boule (non vide, de rayon $r_x > 0$) entièrement contenue dans $B(a,r)$: cette dernière est bien un ouvert. □

Théorème I.2 (Stabilité des ouverts et fermés)**.** *Soient U_1, U_2 deux ouverts (resp. deux fermés) d'un EVN E. Alors :*

(i) $U_1 \cap U_2$ et $U_1 \cup U_2$ sont des ouverts (resp. des fermés) ;

(ii) toute union quelconque d'ouverts est un ouvert (mais une intersection infinie d'ouverts peut ne pas l'être) ;

(iii) toute intersection finie de fermés est un fermé.

Démonstration (intersection de deux ouverts) : Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Puisque U_1 est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x,r_1) \subset U_1$. De même, il existe $r_2 > 0$ tel que $B(x,r_2) \subset U_2$. Alors $B(x, \min(r_1,r_2)) \subset U_1 \cap U_2$, ce qui montre que $U_1 \cap U_2$ est bien un ouvert. Les autres points se montrent de manière analogue. □

Remarque : *L'intersection d'une famille infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte : $\bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$, qui est fermé. C'est exactement le point (i) du théorème ci-dessus qui échoue lorsqu'on remplace « deux ouverts » par « une infinité d'ouverts » : le rayon $\min(r_1,r_2)$ de la démonstration devient $\inf_n r_n$, qui peut valoir 0.*

II. Limites et continuité

Dans toute la suite, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (les définitions s'adaptent à $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et même, au prochain semestre de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$), et les normes utilisées sont indifférentes grâce au théorème d'équivalence. On travaille avec la norme N_∞ pour la commodité des calculs.

a) Limite d'une fonction

Définition II.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f admet L pour **limite** en $\mathbf{x}_0$, et on note $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Remarque : *Cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$ (théorème d'équivalence). Par ailleurs, si f admet $+\infty$ pour limite en $\mathbf{x}_0$: $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \eta \implies f(\mathbf{x}) \geq A$.*

Proposition II.1 (Unicité de la limite)**.** *Si f admet une limite en $\mathbf{x}_0$, celle-ci est unique.*

Démonstration : Supposons $f(\mathbf{x}) \to L$ et $f(\mathbf{x}) \to L'$ en $\mathbf{x}_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour $\mathbf{x}$ assez proche de $\mathbf{x}_0$:

$$|L - L'| = |L - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - L'| \leq |f(\mathbf{x}) - L| + |f(\mathbf{x}) - L'| < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $L = L'$. □

Proposition II.2 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ si et seulement si pour toute suite $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ convergeant vers $\mathbf{x}_0$, on a $f(\mathbf{x}_n) \to L$.*

Démonstration (esquisse) : Le sens ($\Rightarrow$) *est immédiat par définition. Pour* ($\Leftarrow$)*, on procède par contraposée : si f ne tend pas vers L, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(\mathbf{x}_n)$ avec $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \leq 1/n$ et $|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0$.* □

Remarque (Intérêt pratique de la caractérisation séquentielle) : *Ce résultat est surtout utilisé* par contraposée *pour* ***montrer qu'une limite n'existe pas*** *: il suffit d'exhiber* deux *suites (ou deux chemins) tendant vers $\mathbf{x}_0$ le long desquelles f admet des limites différentes (voir la technique du « chemin particulier » au §II.4).*

Proposition II.3 (Opérations sur les limites)**.** *Si $f \to L_1$ et $g \to L_2$ en $\mathbf{x}_0$, alors en $\mathbf{x}_0$: $\alpha f + \beta g \to \alpha L_1 + \beta L_2$, $fg \to L_1 L_2$, et $f/g \to L_1/L_2$ si $L_2 \neq 0$.*

b) Permutation des limites itérées

Proposition II.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$. Si de plus, pour tout x, $\lim_{y\to b} f(x,y)$ existe, et pour tout y, $\lim_{x\to a} f(x,y)$ existe, alors :*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = L.$$

Remarque : *L'hypothèse cruciale est l'existence de la limite double. Sans elle, les limites itérées peuvent exister et différer : c'est le cas de $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$ (sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $x = -y$) : on a $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$, tandis que $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$. Les deux limites itérées existent mais diffèrent : f n'a donc* a fortiori *pas de limite double en $(0,0)$.*

c) Fonctions continues

Définition II.2. Soit $p \in U$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est **continue en** p si $\lim_{\mathbf{x}\to p} f(\mathbf{x}) = f(p)$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \|\mathbf{x} - p\| \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - f(p)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est **continue sur** U si elle est continue en tout point de U.

Exemple détaillé (fonction affine). Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - 2y$ est continue.

Soient $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ et $\mathbf{z} = (x,y)$ avec $\|\mathbf{z} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \eta$, c'est-à-dire $|x - x_0| \leq \eta$ et $|y - y_0| \leq \eta$. Alors :

$$|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{p})| = |(x - x_0) - 2(y - y_0)| \leq |x - x_0| + 2|y - y_0| \leq 3\eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/3$.

Proposition II.5 (Image réciproque d'un ouvert)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration : Soit $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$; alors $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Comme V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon[\subset V$. Par continuité de f en $\mathbf{x}_0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon$, donc $f(\mathbf{x}) \in V$, i.e. $\mathbf{x} \in f^{-1}(V)$. Ainsi $B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset f^{-1}(V)$. □

Application. Montrons que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La projection $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ est continue et $U = \pi_1^{-1}(]0, +\infty[)$. Comme $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Cette méthode — écrire un ensemble comme image réciproque d'un intervalle par une fonction continue simple — est la manière la plus rapide de prouver qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par une inégalité stricte est un ouvert (voir Exercice 1).

Proposition II.6 (Opérations sur les fonctions continues)**.** *Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues sur U.*

(i) $|f|$, $\alpha f + \beta g$, fg sont continues sur U ;

(ii) f/g *est continue sur* $\{x \in U \mid g(x) \neq 0\}$ *;*
(iii) si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* $h \circ f$ *est continue sur* U*.*

Corollaire II.1. *Toute fonction polynomiale en* n *variables est continue sur* $\mathbb{R}^n$*. En particulier,* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*, et* $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + 1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *(dénominateur ne s'annulant jamais).*

d) Continuité partielle

Définition II.3. Soit $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto f(x, \beta)$ est la **fonction partielle par rapport à la première variable**. On définit de même $y \mapsto f(\alpha, y)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Proposition II.7. *Si* f *est continue en* $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$*, alors les deux fonctions partielles* $x \mapsto f(x, \beta)$ *et* $y \mapsto f(\alpha, y)$ *sont respectivement continues en* α *et* β*.*

Démonstration : La fonction $x \mapsto f(x, \beta)$ *est la composée de* $x \mapsto (x, \beta)$ *(continue) et de* f *(continue en* $\mathbf{a}$*) ; donc elle est continue en* α*.* □

Attention, piège classique : *La réciproque est fausse : la continuité des deux fonctions partielles en un point n'implique* pas *la continuité de* f *en ce point. C'est l'un des pièges les plus classiques du chapitre — une fonction peut « bien se comporter » le long des deux axes de coordonnées tout en étant discontinue dès qu'on s'en approche par une autre direction.*

Contre-exemple classique. Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions partielles vérifient $f(x, 0) = f(0, y) = 0 \to 0$ en 0. Pourtant $f(t, t) = 1/2$ pour tout $t \neq 0$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. Plus précisément, en passant en coordonnées polaires $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, on a $f(x, y) = \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ pour $\rho \neq 0$: la valeur de f ne dépend même pas de ρ, seulement de la direction θ d'approche du point $(0, 0)$ — c'est la signature caractéristique d'une fonction sans limite en un point.
Remarque : *La technique du* chemin particulier *est un outil puissant pour réfuter l'existence d'une limite : si* f *admet des limites différentes selon deux chemins convergeant vers* $\mathbf{x}_0$*, elle n'a pas de limite en* $\mathbf{x}_0$*. En pratique, on teste dans l'ordre : les deux axes* $y = 0$ *et* $x = 0$*, la première bissectrice* $y = x$*, puis des chemins paraboliques* $y = \lambda x^2$ *ou* $x = \lambda y^2$ *si les précédents ne suffisent pas à distinguer un comportement.*

e) Étude de limites en $(0, 0)$

Exemple : chemin particulier (absence de limite). Soit $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^6}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On a $f(x, 0) = 0 \to 0$, mais $f(x, x) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^6} = \dfrac{1}{1 + x^2} \to 1$. Les limites selon deux chemins sont différentes : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

III. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les définitions sont données en dimension 2 et se généralisent sans difficulté.

a) Dérivées partielles

Définition III.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{p} = (a, b) \in U$. On appelle **dérivée partielle de f par rapport à x en $\mathbf{p}$** la limite (si elle existe) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

C'est la dérivée en a de l'application partielle $\varphi_1 : x \mapsto f(x, b)$. On définit de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ comme dérivée en b de $\varphi_2 : y \mapsto f(a, y)$.

Soit $p = (a, b) \in U$
Si f admet une première dérivée partielle en (a, b) et on pose : $\partial_1 f(a, b) = \varphi_1'(a)$
Si f admet une deuxième dérivée partielle en (a, b) et on pose : $\partial_2 f(a, b) = \varphi_2'(b)$
En pratique, on utilise plutôt : $\partial_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\partial_2 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

Attention, on verra très souvent ce genre d'écriture : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. La variable x au dénominateur signifie qu'on dérive selon la première variable (c'est une variable liée) tandis que le x de (x, y, z) désigne une coordonnée d'un point libre (c'est une variable libre). Ces notations sont donc bien différentes !

Exemples :
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction f définie par : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \to \alpha x + \beta y + \gamma yz$
Déterminer les dérivées partielles de f.
On a facilement : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \beta + \gamma z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \gamma y$
Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $f : H \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^y$
Déterminer les dérivées partielles de f.
On peut écrire : $f(x, y) = e^{y \ln x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y$

Mise en garde. L'existence des dérivées partielles en un point n'implique ni la continuité de f en ce point, ni aucune propriété de régularité globale (voir exercice 4).

b) Fonctions de classe C^1

Définition III.2. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de **classe C^1** sur U, et on note $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, si f admet des dérivées partielles sur U et si ces dérivées partielles sont *continues* sur U.

Exemple important : les polynômes à p variables sont C^1 sur $\mathbb{R}^p$

Théorème III.1 (Différentiabilité des fonctions C^1)**.** *Si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors pour tout $\mathbf{p} = (a, b) \in U$ et tout $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$:*

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})\, h_2 + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \textit{quand } \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

En particulier, toute fonction de classe C^1 est continue.

c) Gradient

Si U désigne un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$
Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, le **gradient** de f est l'application ∇f vérifiant : $U \to \mathbb{R}^2$,

$$(a, b) \to \nabla f(a, b), \text{ avec } \nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

Si U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\nabla f(a,b,c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

Géométriquement, $\nabla f(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur du plan dont les coordonnées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Le **gradient est un champ de vecteurs**, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.

Réécriture du développement limité à l'ordre 1 :

Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $p = (a,b) \in U$

Il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(z) \underset{z \to p}{\longrightarrow} 0$

Et : $\forall (x,y) \in U : f(z) = f(p) + \langle \nabla f(p) | (z-p) \rangle + \varepsilon(z)\|z-p\|$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \to xy^2 - yz^2$

Calculer $\nabla f(1,-2,3)$

d) Différentielle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U

Pour tout $a \in U$, l'application linéaire : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (h,k) \to h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ est appelée **différentielle** de f en a, notée $df(a)$

- On omet souvent d'indiquer le point a, et on obtient la formule : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ (avec, $dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (h,k) \to h$ et $dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (h,k) \to k$)

- La différentielle d'une fonction en un point renseigne sur le comportement local de f. Plus précisément, la différentielle de f en un point M représente la variation infinitésimale de la fonction f en ce point, c'est-à-dire la variation de f lors d'une variation infinitésimale à proximité de M.

Exercice :

1) Déterminer la différentielle de $f : (x,y,z) \to x^2 - y^3 + 2xyz$ en tout point (x_0,y_0,z_0) de $\mathbb{R}^3$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u(x,y) \to \|u\|_2^2$, montrer que la différentielle de f en (x_0,y_0) est : $df(x_0,y_0) = 2x_0dx + 2y_0dy$

e) Composition avec une fonction d'une variable

Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, I un intervalle contenant $f(U)$ et $\theta \in C^1(I,\mathbb{R})$ Alors : $\theta \circ f$ est une fonction de classe C^1 avec pour tout $p \in U$:

$$\frac{\partial(\theta \circ f)}{\partial x}(p) = \theta'(f(p))\frac{\partial f}{\partial x}(p) \text{ et } \frac{\partial(\theta \circ f)}{\partial y}(p) = \theta'(f(p))\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

f) Première règle de la chaîne

Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $(y_1;y_2) \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$ On suppose que la fonction : $t \to (y_1(t);y_2(t))$ est à valeurs dans U. Alors $f \circ g : t \to f(y_1(t);y_2(t))$ est de classe C^1 et, pour tout a de I : On a : $(f \circ g)'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(y(a))y_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y(a))y_2'(a)$

Exemple :

Soit h une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$ On procède au changement de variables en coordonnées polaires, soit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ On définit alors la fonction $h : (r,\theta) \to f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ Déterminer $\frac{\partial h}{\partial r}$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}$

g) Dérivée selon un vecteur

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, $p \in U$, $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ L'application $\varphi_v : t \to f(p+tv)$ est définie au voisinage de 0, dérivable en 0, de dérivée : $\varphi_v'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)h + \frac{\partial f}{\partial y}(p)k = \langle \nabla f(p) | v \rangle$

On note $D_v f(p) = \varphi_v'(0)$, cette dérivée est la dérivée de f en p selon le vecteur v

Remarque : Etudier la dérivabilité de f en p selon le vecteur v revient à étudier l'existence de : $\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t}$

h) Deuxième règle de la chaîne

Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ Soit $(\varphi,\psi) \in C^1(V,\mathbb{R})^2$ un couple de fonctions tel que $\Phi : (x,y) \to (\varphi(x,y),\psi(x,y))$ soit à valeurs dans U. Alors : $f \circ \Phi : V \to \mathbb{R}, (x,y) \to f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ est de classe C^1

De plus : $\forall p \in V$

$$\partial_1(f\circ\Phi) = \partial_1 f(\Phi(p))\partial_1\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p))\partial_1\psi(p)$$

$$\partial_2(f\circ\Phi) = \partial_1 f(\Phi(p))\partial_2\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p))\partial_2\psi(p)$$

i) Dérivées partielles successives et classe C^k

Définition III.3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \{1,2\}^2$. On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2** en **a** par rapport aux variables x_i puis x_j si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur un voisinage de **a** et est dérivable par rapport à x_j en **a**. On note alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{a}).$$

Définition III.4. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de **classe** C^k sur U (pour $k \geq 1$) si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues sur U. Si f est C^k pour tout k, on dit que f est C^∞ (ou *lisse*).

Théorème III.2 (Schwarz, admis)**.** *Soit $f \in C^2(U,\mathbb{R})$. Alors pour tout* **a** $\in U$ *:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}).$$

Remarque : *L'hypothèse C^2 est* essentielle*. L'exemple de Peano montre qu'elle ne peut être affaiblie : pour $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ (étendue par $f(0,0)=0$), on peut vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, et que $f \notin C^2$ en $(0,0)$. En pratique, dans quasiment tous les exemples usuels (fonctions polynomiales, exponentielles, trigonométriques et leurs combinaisons), le théorème de Schwarz s'applique sans qu'il soit besoin de le vérifier explicitement : c'est surtout la frontière (points « recollés » d'une fonction définie par morceaux) qu'il faut surveiller.*

j) Équations aux dérivées partielles

La règle de la chaîne permet de résoudre certaines EDP par changement de variables.

Exemple 1 — EDP simple. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^3 + y$.

On intègre par rapport à x (en traitant y comme un paramètre) :

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

où $C(y) = f(0, y)$ est une fonction de classe C^1 en y (nécessaire pour que $f \in C^1$). Réciproquement, toute telle f convient.

Exemple 2 — EDP avec changement de variables. Trouver toutes les $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

On pose le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ (soit $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$) et $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Donc g ne dépend pas de u, soit $g(u, v) = h(v)$ avec $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En revenant aux variables initiales : $f(x, y) = h(x - y)$.

Remarque (Vérification et méthode générale) : *On vérifie la cohérence du résultat en calculant* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h'(x - y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -h'(x - y)$ *: leur somme est bien nulle. Plus généralement, pour résoudre une EDP linéaire du premier ordre à coefficients constants* $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *(avec* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$*), on choisit un changement de variables* $u = \alpha x + \beta y$ *et* v *tel que* (u, v) *soit un système de coordonnées (c'est-à-dire tel que le changement soit inversible), de sorte que l'EDP devienne* $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$ *(à une constante multiplicative près selon le choix de* v*) : les solutions sont alors les fonctions constantes le long des droites* $\alpha x + \beta y = cste$.

IV. Extrema de fonctions de deux variables

Dans tout ce paragraphe, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a) Définitions

Définition IV.1. Soit $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{p} \in X$.

- f admet un **maximum global** en $\mathbf{p}$ si $\forall \mathbf{z} \in X,\ f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{p})$.
- f admet un **maximum local** en $\mathbf{p}$ si $\exists \eta > 0,\ \forall \mathbf{z} \in X \cap B(\mathbf{p}, \eta),\ f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{p})$.

On définit de même le minimum (local ou global). Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

b) Points critiques

Définition IV.2. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\mathbf{p} \in U$. On dit que $\mathbf{p}$ est un **point critique** (ou *point stationnaire*) de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 0, \quad \text{i.e. } \nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

Théorème IV.1 (Condition nécessaire d'extremum local)**.** *Soit* $f \in C^1(U, \mathbb{R})$*. Si* f *admet un extremum local en* $\mathbf{p} \in U$*, alors* $\mathbf{p}$ *est un point critique de* f*.*

Démonstration : Supposons que f *admette un maximum local en* $\mathbf{p} = (a, b)$*. La fonction partielle* $x \mapsto f(x, b)$ *admet un maximum local en* a*, donc* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$*. De même pour* y*.* □

Attention, piège classique : *La réciproque est fausse : un point critique peut n'être ni un maximum ni un minimum local. On parle alors de* ***point-selle*** *(ou point col).*

Exemple (point-selle). Pour $f(x, y) = x^3 + y^3$, on a $\nabla f = (3x^2, 3y^2)$, donc $(0, 0)$ est l'unique point critique. Mais $f(t, 0) = t^3$ change de signe au voisinage de 0, donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local : c'est un point-selle.

Exemple complet — méthode de la somme de carrés. Étudions les extrema de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x$.

Étape 1 (points critiques). $\nabla f(x,y) = (2x - y - 1,\ -x + 2y)$. Le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ donne $y = x/2$, puis $2x - x/2 = 1$, soit $x = 2/3$ et $y = 1/3$. Le seul point critique est $\mathbf{p}_0 = (2/3,\ 1/3)$.

Étape 2 (nature de l'extremum). On met f sous forme canonique en regroupant les termes en x :

$$f(x,y) = \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

Cette écriture (vérifiable en développant) est une somme de deux carrés moins la constante $1/3$: elle est donc minimale exactement lorsque les deux carrés s'annulent simultanément, c'est-à-dire en $y = 1/3$ et $x = \frac{y+1}{2} = \frac{2}{3}$ — on retrouve bien $\mathbf{p}_0$. On conclut que f admet en $\mathbf{p}_0$ un **minimum global**, de valeur $f(\mathbf{p}_0) = -1/3$, et qu'elle n'admet pas de maximum (la somme de carrés n'est pas majorée). Cette technique de mise sous forme canonique, analogue au « discriminant » d'un trinôme, est particulièrement efficace lorsque f est un polynôme de degré 2 en (x,y).

Exercices

Exercice n°1

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:

a) $\mathbb{R}^2$ b) $]0,1[^2$ c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \cos x\}$

Exercice n°2

Les deux questions sont indépendantes.

a) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Exercice n°3

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^y; \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto e^{-x}\sin(x^2+y^2).$$

Exercice n°4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+,\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que f n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^1. Préciser ses dérivées partielles.

Exercice n°5

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\theta : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 et calculer $\theta'(t)$.

Exercice n°6

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ (examiner la limite le long de $y = x^2$).

Exercice n°7

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = h(x)$.

Exercice n°8 (oraux MP CCINP 2022)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose : $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
   (c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice n°9

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ pour tout (a, b). Montrer qu'il existe $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x, y) = h(2x + y)$.
Indication : poser $x = u + v$, $y = u - 2v$ et étudier $g(u, v) = f(u + v, u - 2v)$.

Exercice n°10

Étudier l'existence des limites en $(0, 0)$ des fonctions :

a) $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ b) $(x, y) \mapsto \dfrac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$ *(Ind. : poser $X = x^3$, $Y = y^2$, puis polaires.)*

Exercice n°11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Étudier la continuité de f, l'existence et la continuité de ses dérivées partielles.

Exercice n°12

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

c) Conclure vis-à-vis du théorème de Schwarz.

Exercice n°13 (d'après CCP)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g(x,y,y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. **Expliciter** $f(x,y)$, et calculer :

$$\partial_1(f)(x,y), \quad \partial_2(f)(x,y), \quad \partial_1^2(f)(x,y), \quad \partial_{12}^2(f)(x,y) \quad \text{et} \quad \partial_2^2(f)(x,y)$$

2. **Déterminer les extrema éventuels de** f **sur** $\mathbb{R}^2$.
3. **Montrer que, pour tout** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2.$$

   En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.
4. **Montrer que** f **présente un minimum local en** $(-2,2)$.

Exercice n°14

Soit $f(x,y) = \left(x^2 + x + y - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$.

a) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.

b) Montrer que f admet un minimum local. Ce minimum est-il global ?

c) f admet-elle un maximum global ?

Exercice n°15

Soit $f(x,y) = x^2 y + \ln(1+y^2)$.

a) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.

b) En étudiant les signes de $f(x,-x^3)$ et $f(0,y)$, montrer que f n'a pas de minimum local en $(0,0)$.

c) Que peut-on conclure sur les extrema globaux de f ?

Exercice n°16

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ admet un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°17

Donner les extrema (globaux et locaux) de $f(x,y) = -2x^3 + 3x^2 + y^2$.

Exercice n°18

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout (x,y). Quelle relation lie $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$?

Exercice n°19

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (équation de Laplace). On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.

b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$.

Exercice n°20

Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $U =]0, +\infty[\times]-\pi/2; \pi/2[$. Soit $f : P \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Justifier que P est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

c) Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

d) En déduire l'expression du Laplacien en coordonnées polaires : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice n°21

On cherche les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. En posant $u = x + y$, $v = x + 2y$ et $g(u, v) = f(x, y)$, déterminer l'ensemble de ces fonctions.

Exercice n°22

Soit $f(x, y) = x\,e^{x(y^2+1)}$.

a) Justifier que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées partielles.

b) Montrer que le seul point critique de f est $A = (-1, 0)$.

c) Montrer que $f(x, y) \geq x\,e^x$ pour tout (x, y), et en déduire que A est un minimum global de f.