Chapitre 10 : Les suites

M. Calciano

I. Les réels

1) Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit qu'un réel M est un majorant de A si : $\forall x \in A,\ x \leq M$**.**

On dit qu'un réel m est un minorant de A si : $\forall x \in A,\ m \leq x$**.**

La borne supérieure de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A. Elle se note $\sup A$**.**

La borne inférieure de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A. Elle se note $\inf A$**.**

Exemple simple : Soit $A = [0\,;2]$. Les majorants de A sont tous les réels $M \geq 2$ (par exemple 2, 3, 10...). Le plus petit d'entre eux est 2, donc $\sup A = 2$. Les minorants de A sont tous les réels $m \leq 0$ (par exemple 0, -1, -5...). Le plus grand d'entre eux est 0, donc $\inf A = 0$.

Remarque : Si les réels $\inf A$ et $\sup A$ existent, alors $\inf A \leq \sup A$.

Attention : Ne pas confondre les notions de plus grand élément de A (noté $\max A$) et de borne supérieure de A.

Si A possède un plus grand élément, alors $\sup A = \max A$; en revanche, si A possède une borne supérieure $\sup A$, on n'a pas nécessairement de plus grand élément.

Ex : $]0\,;1[$.

La remarque reste valable pour $\inf A$ et $\min A$.

2) Propriétés (admises)

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée possède sa borne supérieure.

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée possède sa borne inférieure.

Ex : L'intervalle $I =]a\,;b[$ (pour a et b réels) admet a comme borne inférieure et b comme borne supérieure.

3) Théorème

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et M un réel, alors on a $M = \sup A$ si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > \mathbf{0},\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{M} - \varepsilon < \mathbf{x}$$

De même :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et m un réel, alors on a $m = \inf A$ si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{m} \leq \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > \mathbf{0},\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{x} < \mathbf{m} + \varepsilon$$

Démonstration : Le premier point précise que « a » est un majorant, et le second point que c'est le plus petit...

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a - \varepsilon < x$.

Exemple : Quelle est la borne inférieure de $A = \{2^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$?

4) Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ se notent à l'aide de crochets, dont le sens indique si la borne appartient ou non à l'intervalle :

- le crochet **fermé** (ex. $[a\,;b]$) signifie que la borne *appartient* à l'intervalle ;
- le crochet **ouvert** (ex. $]a\,;b[$ ou $]a\,;b]$ ou $[a\,;b[$) signifie que la borne *n'appartient pas* à l'intervalle.

Ainsi :

$$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Lorsque la borne est infinie, le crochet est nécessairement ouvert : par exemple

$$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad]-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}.$$

On note aussi parfois $]a\,;b[$ sous la forme $(a\,;b)$ (notation anglo-saxonne).

Théorème dit de caractérisation : Si une partie I de $\mathbb{R}$ est telle que, pour tous $x, y \in I$ avec $x \leq y$, le segment $[x\,;y]$ tout entier soit contenu dans I : alors I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Démonstration (caractérisation) : Clairement, si I est un intervalle, alors I vérifie $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x;y] \subset I$.

Supposons que I vérifie : $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ [x;y] \subset I$.

Soit a et b les bornes inférieure et supérieure de I, éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Il y a 9 cas à distinguer selon que $b \in \mathbb{R} \setminus I$, $b \in I$ ou $b = +\infty$, et de même pour a !

Et on constate bien que I est de la forme (a, b) (la parenthèse correspondant à un crochet ouvert ou fermé selon le cas).

5) Densité

Soient x et y deux réels tels que $x < y$:

Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle $]x\,;y[$.

Il existe un nombre irrationnel ξ dans l'intervalle $]x\,;y[$.

Remarque : Cela permet de construire $\mathbb{R}$ comme « une extension de $\mathbb{Q}$ ».

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Petit exercice d'application : Soit x un réel. On souhaite montrer qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers x.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un rationnel $r_n \in \left]x\,;x+\frac{1}{n}\right[$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

2) Montrer que la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ ainsi construite converge vers x.

II. Les suites

1) Définition

On appelle suite de nombres réels toute fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on note pour tout entier n : $u_n = u(n)$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notation : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Notation : On prendra grand soin de ne pas confondre :

- une suite, qui est une application, et qui sera notée u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou éventuellement (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté ;
- son terme général, qui est un réel, et qui sera noté u_n ou directement donné par une expression en n.

Ainsi, des énoncés comme « u_n est croissante » ou « u_n converge » sont à proscrire ! C'est « u est croissante » ou « u converge ».

2) Suites réelles et ordre

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que u est minorée, majorée ou bornée si $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est !

On dit que u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.

On dit que u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.

On dit que u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

3) Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u est minorée, la borne inférieure de u est : $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Si u est majorée, la borne supérieure de u est : $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors u_n est minorée par 0, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$ et $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \dfrac{1}{3}$.

4) Suites extraites

Soit u et v deux suites. On dit que v est une suite extraite de u s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarque : La fonction φ vérifie nécessairement : $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration : Évidente par récurrence !

Exemples fondamentaux : Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En effet, pour $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on considère $\varphi : n \mapsto 2n$, qui est strictement croissante, et on a bien $u_{2n} = u_{\varphi(n)}$. Pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on considère $\psi : n \mapsto 2n+1$, qui est également strictement croissante, et on a $u_{2n+1} = u_{\psi(n)}$.

Mais alors, la suite (u_{2n+1}) est-elle une suite extraite de (u_{2n}) ?

Déjà, intuitivement… non, il serait étrange que les termes impairs soient contenus dans les termes pairs… pourtant : $\varphi : 2n \to 2n+1$ est croissante ?

Oui, et si on pose $w_n = u_{2n}$, alors $u_{2n+1} = w_{\varphi(n)} = u_{2\varphi(n)}$, donc $2n+1 = 2\varphi(n)$,

soit $\varphi(n) = n + \dfrac{1}{2}$ n'est plus à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Plus généralement, si (u_n) possède une suite extraite définie à l'aide de φ,

et si $(u_{\varphi(n)})$ possède elle-même une suite extraite définie à l'aide de ψ,

alors cette dernière est une suite extraite de (u_n) définie avec $\boldsymbol{\varphi \circ \psi}$.

5) Limite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l un réel.

- on dit que u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$;
- on dit que u diverge vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow A \leq u_n)$;
- on dit que u diverge vers $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A)$.

6) Théorème dit de « l'unicité de la limite »

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(l; l') \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$, alors $l = l'$.

Démonstration :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon)$

En particulier pour $\varepsilon/2$, *et* $n \geq \max(n_0; n_1)$, $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$ *et* $|u_n - l'| \leq \varepsilon/2$.

Or $|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \varepsilon$ *; en faisant tendre* ε *vers* 0, $l = l'$.

7) Limites et inégalités

Soient u et v deux suites de réels convergentes.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow u_n < v_n)$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Attention : Lors d'un « passage à la limite », une inégalité même stricte conduit à une inégalité large.

8) Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : En appelant l *la limite, on a :* u *converge vers* l *si :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$.

Pour $\varepsilon = 1$, *on a :* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq 1)$, *donc pour* $n \geq n_0$, $u_n \leq 1 + l$.

Il suffit alors de prendre $\max(u_0, \ldots, u_{n_0}; 1 + l)$ *comme majorant (et un raisonnement analogue pour le minorant).*

Remarque : La réciproque est fausse, penser par exemple à $u_n = (-1)^n$.

9) Théorèmes

a) Suites extraites d'une suite convergente

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **et** l **un réel. Si** u **converge vers** l**, alors toute suite extraite de** u **converge vers** l**.**

Démonstration : En appelant l *la limite, on a :* u *converge vers* l *si :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$, *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$ *avec* $\varphi(n) > n$.

Donc : $\varphi(n) > n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$ *et* v_n *converge vers* l.

Réciproque partielle (très utile en pratique) : Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers une même limite** l**, alors la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** l**.**

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $(u_{2n}) \to l$, *il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N_1,\ |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$. *Comme*

$(u_{2n+1}) \to l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2,\ |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2+1)$. Tout entier $n \geq N$ est pair (de la forme $2k$ avec $k \geq N_1$) ou impair (de la forme $2k+1$ avec $k \geq N_2$) ; dans les deux cas, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Donc (u_n) converge vers l.

b) Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un intervalle I, a un point de I ou une extrémité de I.

$L \in \overline{\mathbb{R}}$, $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Démonstration : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon)$.

Et : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

D'où la conclusion !

c) Opérations sur les limites

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(L; L') \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit α un réel non nul.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = LL'$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = L + L'$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha L$.

Alors, si $L \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{L}$.

Alors, si $L = 0^+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Il peut être judicieux de se souvenir des tableaux de limites vus en terminale :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indéterminée

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	Indéterminée

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	Indéterminée	Indéterminée

Exemple : Montrer que la suite $u_n = n^2 - n\cos(n)$ diverge.

d) Comparaison

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que u et w convergent vers L et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Démonstration :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_1 \Longrightarrow |w_n - L| \leq \varepsilon)$

Ainsi, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|v_n - L| \leq \max(|u_n - L|, |w_n - L|) \leq \varepsilon$.

e) Théorème

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq |u_n|$

Alors, v **est convergente et sa limite est** 0**.**

Démonstration : On a $-u_n \leq v_n \leq u_n$ *et on applique le théorème d'encadrement.*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

Alors, v **est divergente et sa limite est** $+\infty$**.**

f) Théorèmes de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone, alors u est convergente si et seulement si u est bornée.

Si u **est croissante et majorée, alors** u **est convergente.**

Si u **est croissante et non majorée, alors elle diverge vers** $+\infty$**.**

Si u **est décroissante et minorée, alors** u **est convergente.**

Si u **est décroissante et non minorée, alors** u **diverge vers** $-\infty$**.**

Démonstration : Montrons que si u *est croissante et majorée, alors* u *est convergente.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.

De plus : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.

Soit $A = \{u_n / \ n \in \mathbb{N}\}$ *: c'est une partie non vide de* $\mathbb{R}$*, et majorée, donc elle admet une borne supérieure notée* L.

Et : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ L - \varepsilon < u_N \leq L$.

Comme u_n *est croissante,* $\forall n \geq N,\ L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L$*, donc* u_n *converge vers* L.

10) Suites adjacentes : https://youtu.be/eg2ng0mFQXY

a) Définition

Deux suites u **et** v **sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante, et si** $(u_n - v_n)$ **converge vers** 0**.**

b) Théorème

Si u **et** v **sont deux suites adjacentes, alors** u **et** v **sont convergentes et de même limite** L**.**

Et si u est croissante (et donc v décroissante) : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n \leq L \leq v_p$**.**

Démonstration : Si u est croissante et v décroissante, alors nécessairement $u_n \leq v_n$.

Précisons ce point : comme u est croissante et v décroissante, et comme $(u_n - v_n) \to 0$, on peut montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout n. En effet, si l'on avait $u_{n_0} > v_{n_0}$ pour un certain n_0, alors par croissance de u et décroissance de v, on aurait pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq u_{n_0} > v_{n_0} \geq v_n$, donc $u_n - v_n > v_{n_0} - u_{n_0} > 0$, ce qui contredirait $(u_n - v_n) \to 0$ (une suite de réels strictement minorée par un réel strictement positif ne peut pas converger vers 0). On a donc bien $u_n \leq v_n$ pour tout n.

Et : $u_n \leq v_n \leq v_0$ donc u_n converge.

De même, v_n converge.

Comme $(u_n - v_n)$ converge vers 0, u_n et v_n ont même limite.

Exemple : On souhaite montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente.

On introduit à cette fin la suite v définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Montrer que u et v sont adjacentes et conclure !

c) Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge.

Démonstration : Construisons par dichotomie deux suites adjacentes encadrant une infinité de termes de u.

Comme u est bornée, il existe $a_0 \leq b_0$ tels que tous les termes de u appartiennent à $[a_0, b_0]$.

On construit alors par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) : à chaque étape, on coupe $[a_n, b_n]$ en son milieu $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, et on choisit pour $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ celle des deux moitiés $[a_n, c_n]$ ou $[c_n, b_n]$ qui contient une infinité de termes de u (l'une au moins des deux en contient une infinité, car leur réunion en contient une infinité).

On a alors (a_n) croissante, (b_n) décroissante, et $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$: les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes (cf. théorème précédent), et convergent vers une même limite L.

Construisons enfin une suite extraite de u convergeant vers L : on choisit $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$, puis, $\varphi(n)$ étant choisi, comme $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de u, on peut choisir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

La fonction φ est alors strictement croissante, et pour tout n, $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$: par encadrement, $u_{\varphi(n)} \to L$.

11) Suites complexes

a) Définition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

b) Proposition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. u est bornée si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont bornées.

c) Proposition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell) \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell).$$

III. Suites récurrentes

1) Théorème-Définition

Soit f une fonction de I dans I (I désigne un intervalle) et a un réel de I.

Il existe une unique suite u telle que :

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$.

Remarque n°1 : la fonction f est appelée fonction itératrice.

Remarque n°2 :

Si $f : x \to x + c$ alors u est arithmétique de raison c.

Si $f : x \to ax$ alors u est géométrique de raison a.

Si $f : x \to ax + c$ alors u est arithmético-géométrique.

2) Théorème

Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est monotone alors :

Si f est croissante, alors u est monotone.

Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Démonstration : En exercice !

3) Théorème

Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est continue alors :

Si u converge vers L dans I, alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelées points fixes de f.

Démonstration : u_{n+1} et u_n ont la même limite, donc L vérifie $f(x) = x$.

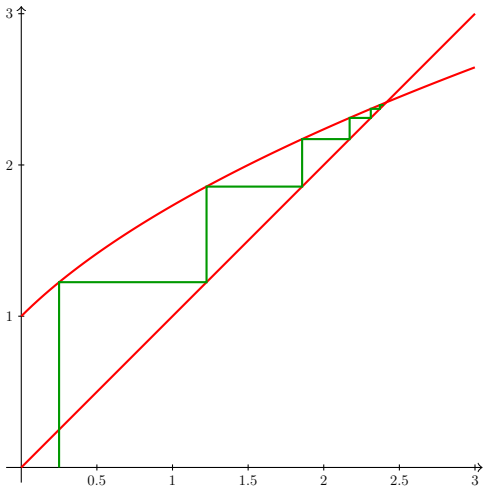
Petit exercice d'application : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
3) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.
4) Déterminer la limite ℓ de (u_n) en utilisant le théorème ci-dessus.

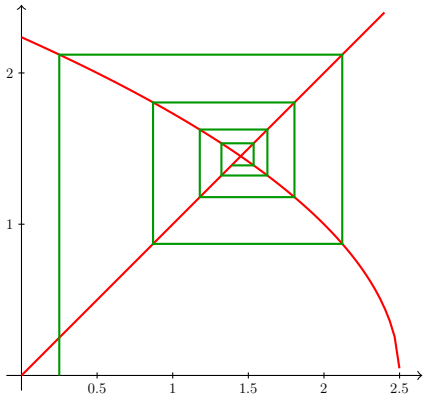
Corrigé succinct :

1) $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{4}$, $u_3 = \dfrac{15}{8}$.
2) Initialisation : $u_0 = 1 \in [1; 2]$. Hérédité : si $1 \leq u_n \leq 2$, alors $3 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc $\dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$, et a fortiori $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
3) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2 - u_n}{2} \geq 0$ car $u_n \leq 2$. La suite est croissante et majorée par 2, donc convergente (théorème de la limite monotone).
4) L'itératrice $f(x) = \dfrac{x + 2}{2}$ est continue, donc la limite ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell + 2}{2}$, d'où $2\ell = \ell + 2$ et $\ell = 2$.

Illustrons la méthode par deux exemples de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1/4$, représentés à l'aide d'un diagramme en « escargot » (la courbe de f en rouge, la droite d'équation $y = x$ en rouge également, et la construction itérative des termes de la suite en vert) :



$u_0 = 1/4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n}$



$u_0 = 1/4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{5-2u_n}$

4) Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2

a) Définition

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une suite, réelle ou complexe, vérifiant une relation de récurrence du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (a et b sont deux constantes et $b \neq 0$).

Remarque : L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelée équation caractéristique de la relation récurrente.

b) Théorème (cas complexe)

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.

Sinon, si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.

Démonstration : Clairement les suites proposées sont solutions. Mais y en a-t-il d'autres ?

Soit v_n une autre solution.

Montrons que si $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$ alors $u_n = v_n$.

En effet, par récurrence, soit P_n : « $u_n = v_n$ ».

P_0 et P_1 sont vraies.

Si P_n (et P_{n-1}) est vraie, alors $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = av_n + bv_{n-1} = v_{n+1}$.

c) Théorème (cas réel)

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique ne possède aucune solution réelle, alors, en notant l'une des deux solutions complexes sous la forme $r = \rho e^{i\theta}$, les solutions réelles sont de la forme : $\rho^n(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Exemple : Soit la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donner l'expression de F_n en fonction de n.

5) Suites arithmético-géométriques

Soit $u_{n+1} = au_n + b$. On cherche L, point fixe de $f(x) = ax + b$, on pose alors $v_n = u_n - L$; on démontre que v_n est géométrique de raison a, on en déduit l'expression de v_n puis de u_n.

IV. Exercices

Exercice n°1

1) Montrer que si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.
2) Est-ce que le produit de deux suites minorées est encore minoré ?
3) Soit une suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, quel lien peut-on faire entre les points fixes de l'itératrice de u_n et ceux de u_{2n} ?

Exercice n°2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ; on suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

1) Justifier le fait que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) a) À l'aide de la suite $(u_{4n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.
   b) Démontrer de même que $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.
3) Que peut-on conclure pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice n°3

Étudier les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n} \qquad v_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}} \qquad w_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \ (a > 0 \text{ et } b > a) \qquad t_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$$

Exercice n°4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L et L'.

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = \min(a_n; b_n)$ et $v_n = \max(a_n; b_n)$.

Étudier la convergence de (u_n) et (v_n).

Exercice n°5

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Ces suites sont-elles adjacentes ?

Exercice n°6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
Et $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul : $u_n \leq v_n$.
2) Montrer que les deux suites u et v convergent vers une même limite.

Exercice n°7

Étudier la suite u définie par $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Exercice n°8 (concours)

Soit $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. L'objectif de l'exercice est d'étudier la convergence de cette suite.

1) Soit $n \geq 2$, on pose $z_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k$. Justifier.
2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $\frac{2}{1 - z_n} = 1 + i\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
3) En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4) La suite (S_n) converge-t-elle ? Justifier.
5) Soit $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) converge. Vous déterminerez sa limite.

Exercice n°9

Étant donné un réel θ, pour tout entier naturel, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et en déterminer la limite.

Exercice n°10

Soit la fonction $f : I \to I$, décroissante, et $a \in I$; on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens de monotonie opposé.

Exercice n°11

1) Soit (z_n) une suite de complexes telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3z_n - 2\overline{z_n} + 1\right).$$

On note $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{1}{5}$ et trouver une relation de récurrence entre y_{n+1} et y_n.

En déduire une expression de x_n et y_n ainsi que la limite de la suite (z_n).

2) Soit u_n la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$.

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°12

À l'aide d'une étude de fonction, étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Exercice n°13 **https://youtu.be/1G21h6xsC1g**

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Exercice n°14

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice n°15

Donner une expression en fonction de n, de la suite u_n définie par : $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.

Même question, avec v_n vérifiant : $v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ (uniquement les expressions réelles).

Exercice n°16

1) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ ne s'annule pas sur $[0, \sqrt{2}]$.

2) Montrer que $\sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} = x \iff (x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 2) = 0$ et conclure quant aux solutions.

3) Étudier la nature de la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

Exercice n°17

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \, dx$, montrer que la suite converge.

Exercice n°18

Pour tout entier n, on définit f_n par $f_n(x) = x^3 + nx - 2$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, f_n s'annule en un unique point qu'on appelle x_n.

2) Montrer que la suite (x_n) ainsi définie converge et déterminer sa limite.

Exercice n°19

Soit la suite u définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, montrer que les suites v et w définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont adjacentes, et en déduire que u converge.

Exercice n°20

Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier non nul, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Déterminer, en étudiant $v_n = u_n - 1$, l'expression de u_n.

Exercice n°21 (concours)

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $x \to 1 + \frac{2}{x}$, et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1) Déterminer les variations de f sur $[1\,;3]$.
2) Montrer que $[1\,;3]$ est stable par f (c'est-à-dire que $f([1\,;3]) \subset [1\,;3]$). Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3) Déterminer les monotonies de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
4) Démontrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
5) Déterminer les limites respectives de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
6) Que peut-on conclure pour (u_n) ?

Exercice n°22 (concours)

On dit qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon).$$

1) Écrire la négation de la définition d'une suite de Cauchy (et en déduire la définition d'une suite qui n'est pas de Cauchy).
2) Montrer que la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
3) Montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy.
4) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Exercice n°23 (concours)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $u_n \leq v_n$.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4) Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

5) Étudier la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°24

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

1) En cas de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, préciser quelles sont les limites possibles.

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x}{2}$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, dresser le tableau de variations de f et le signe de la fonction $x \to f(x) - x$ sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que pour tout entier naturel, $u_n \geq 1$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$. En déduire le sens de variation de v_n.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq v_n + \dfrac{\ln(2)}{2^{n+1}}$.

7) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ v_n \leq v_0 + \ln(2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.

8) Démontrer que v_n est bornée et démontrer que la suite v_n converge.

Exercice n°25 (concours)

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

Le but de l'exercice est de prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et de déterminer la valeur de la limite de cette suite.

1) Prouver que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

2) Prouver que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

3) Justifier le fait que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$.

4) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

5) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

Exercice n°26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}}{n}$.

1) Montrer que si (u_n) converge vers 0, il en est de même pour la suite (v_n).

2) En déduire que si (u_n) converge vers L, il en est de même pour la suite (v_n).

3) À l'aide de la suite $u_n = (-1)^n$, montrer que la réciproque est fausse.