DS 2 : Intégrales généralisées

M. Calciano

Durée : 1 heure

Exercice n°1 (sur 5 points)

Soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Le but de cette question est d'étudier la nature de

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t.$$

(a) Rappeler le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

(c) Étudier finalement la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t$.

Exercice n°2 (sur 5 points)

Pour tous réels a et b distincts, on pose

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,\mathrm{d}x.$$

1) Justifier la convergence de I.

2) Montrer que I ne dépend pas de a et de b
(on pourra poser $X = 2\dfrac{x-a}{b-a} - 1$).

3) En déduire la valeur de I.

<u>Exercice n°3</u> (sur 10 points)

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

4) On précise que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ et on note $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a) À l'aide d'une IPP, établir que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}\,I_n$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel p, $I_{2p+1} = 0$.