Chapitre 19: Les matrices

I. Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$

Dans tout le chapitre, $\varkappa$ désigne $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

1) Définition

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille :
$(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\varkappa$.
Dans la pratique, on assimile la famille $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ avec le tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Exemple :
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, sa deuxième ligne est $(2 \ \ 2 \ \ 6 \ \ 8)$ et sa troisième colonne est $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$

2) Vocabulaire

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$ est une matrice colonne
Une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\varkappa)$ est une matrice ligne
Une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\varkappa)$ est une matrice carrée d'ordre n

3) Matrice identité et matrice $E_{i,j}$

On note pour n entier naturel, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, la matrice de coefficient : $\delta_{i,j}$ (il s'agit du symbole de Kronecker, valant 1 lorsque i = j, et 0 sinon)
La matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la i ème ligne et j ème colonne qui vaut 1. Les matrices de ce type sont dites **élémentaires.**

4) Définition

Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, une matrice B ∈ $\mathcal{M}_{n-m,p-q}(\varkappa)$, est dite extraite de A si elle est obtenue en supprimant m lignes et q colonnes de A.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ obtenue en supprimant la ligne 3 et la colonne 2.

5) Définition

Soit : n,p et q 3 entiers non nuls.
Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, et B∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, on définit :
-la somme : A+B∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, par $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$
-la matrice produit λA∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, par $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}$

-la matrice transposée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\varkappa)$, par $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\varkappa)$, on définit le produit AB, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\varkappa)$ par : $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $\boldsymbol{(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$

Ainsi :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a : $AB = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ et BA n'est même pas défini !!!

On vérifie bien ici que $AB \neq BA$, et que le produit matriciel n'est en général pas commutatif.

6) Théorème :
$(\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa),+,.)$ est un $\varkappa$-espace vectoriel sur $\varkappa$ de dimension np

Démonstration : Vérifier l'axiomatique sur les ev…
Quant à la dimension, les matrices $E_{i,j}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$.

7) Propriétés du produit :
Soient A,B et C trois matrices (<u>pourvu que les produits soient bien définis</u>) :
$A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$
$A\times(B+C) = A\times B + A\times C$
$(A+B)\times C = A\times C + B\times C$
$A\times 0 = 0\times A = 0$
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, alors $I_nA = AI_p = A$

Démonstration : Montrons que $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$
Soit $D = B\times C$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}$ et $A\times(B\times C) = AD$,
Si $E = AD$, alors $e_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$

Et on retrouve le même terme général pour (A×B) ×C

II. Matrices carrées

Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, on dit que :
A est diagonale si : $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, i≠ $j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est triangulaire inférieure si $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, i< $j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est triangulaire supérieure si $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, i> $j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est symétrique si ${}^tA = A$
A est antisymétrique si ${}^tA = -A$

1) Puissance

Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, on définit par récurrence les puissances successives de A par :
$A^0 = I_n$
$A^{k+1} = A\times A^k$

Remarque : On dit que A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ est nilpotente s'il existe un entier k tel que $A^k = 0_{n,n}$

2) Polynôme

Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, et P le polynôme défini par : $P(X) = a_pX^p + ...+a_1X + a_0$
On définit P(A) par : $P(A) = a_pA^p + ...+a_1A + a_0I_n$

Remarque : Si $P(A) = O_n$, alors on dit que P est un polynôme annulateur de A

3) Formule de Newton

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, telles que A×B = B×A
Alors : $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}$
Démonstration : Par récurrence sur p
Evident pour p = 0
On suppose que $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}$
On a : $(A+B)^p(A+B) = (\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k})(A+B) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}A + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}B = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p+1-k}$
On réindexe les sommes en posant l = k+1

Ainsi $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$ sauf si A et B commutent…

4) Formule dite d'identité géométrique

$A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{p}A^kB^{p-k}$

Démonstration: Par récurrence sur p…

III. Matrices carrées inversibles

1) Définition

Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, A est dite inversible s'il existe B∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, telle que $AB = BA = I_n$
Dans ce cas, B est unique et c'est l'inverse de A noté A^{-1}

Démonstration : Justifions l'unicité
Si A a pour inverse B et C alors $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$

$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$

2) Définition
On note $GL_n(\varkappa)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ inversibles, c'est un groupe pour la loi $\times$, appelé groupe linéaire.

Démonstration : Vérifier facilement l'axiomatique…

3) Proposition
Soit $A\in \mathcal{M}_n(\varkappa)$ alors A inversible$\Leftrightarrow$A inversible à droite$\Leftrightarrow$A inversible à gauche

Démonstration :
Supposons que A soit inversible à droite, il existe donc une matrice B telle que $AB=I_n$
On en déduit que rg(B) = n sinon il existerait un élément x de E différent de 0, tel que BX=0 et alors ABX=0
Donc l'endomorphisme représenté par B est bijectif
Soit X dans Ker(A), alors il existe x' tel que X=BX', et AX=ABX', donc ABX'=0 et X'=0 car $AB=I_n$
Donc A est de rang n, et A est inversible.

4) Propriétés
Si $A\in GL_n(\varkappa)$, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$
Si $A\in GL_n(\varkappa)$, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
Si $(A,B) \in GL_n(\varkappa)^2$, alors AB inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Démonstration
Si A inversible d'inverse A^{-1} alors : $AA^{-1} = I_n$ donc A^{-1} inversible d'inverse A, donc $(A^{-1})^{-1} = A$ (par unicité de l'inverse)

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc AB inversible et par unicité de l'inverse, on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5) Résolution de systèmes
Soit $A\in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, $B\in \mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, on note (S) le système : AX = B
Alors S est un système de Cramer si et seulement si A est inversible.
Dans ce cas, l'unique solution de (S) est donné par : $X = A^{-1}B$

Remarque : A est inversible si et seulement si le système : $AX = 0_{nn}$ admet une unique solution 0.
Ainsi A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice forment une famille libre.

6) Cas des matrices triangulaires
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si le produit de ses éléments diagonaux est non nul.

Démonstration : Penser au pivot de Gauss correspondant…

7) Calcul pratique de l'inverse d'une matrice.

a) Méthode basée sur la résolution d'un système
On construit le système AX=Y pour X et Y deux vecteurs (c'est-à-dire deux matrices colonnes)
Si on obtient une unique solution alors A est inversible, et en écrivant X = BY, on obtient l'inverse de A à savoir B.

b) Méthode dite de Gauss-Jordan
On écrit A et à sa droite la matrice identité de même taille.
Par opérations élémentaires, on essaie de ramener A à la matrice identité, et on effectue parallèlement les mêmes opérations sur la matrice identité.
Si on obtient à gauche la matrice identité, alors A est inversible et la matrice à droite est son inverse.
<u>Attention, les opérations élémentaires sont soit exclusivement sur les lignes soit exclusivement sur les colonnes.</u>

Etude d'un exemple :
Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Justifier que A est inversible. Calculer l'inverse de A de deux façons.

IV. Représentations matricielles en dimension finie

1) Définition
On définit la matrice $M_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_p}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ représentative d'une famille de p vecteurs par la concaténation de leurs coordonnées en colonnes dans la base $\mathcal{E}$ de l'espace vectoriel E.

2) Proposition
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
L'application φ : E→ $\mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, $\vec{x} \to M_{\mathcal{E}}(\vec{x})$ qui a tout vecteur $\vec{x}$ associe sa matrice colonne est un isomorphisme de $\varkappa$-espaces vectoriels

Démonstration :
Clairement φ est linéaire donc c'est un morphisme.
Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors $M_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = M_{\mathcal{E}}(\vec{y})$ donc $x_1e_1 + \ldots x_ne_n = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$
D'où : $(x_1 - y_1)e_1 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = 0$
Or $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, donc $x_1 - y_1 = \ldots = x_n - y_n = 0$
Et x=y, donc φ est injective

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, alors $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix}$, $soit\ b = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, on a $\varphi(b) = A$, donc φ est surjective

3) Théorème
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Soit $A = (\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_p})$ une famille de n vecteurs de E.
Notons : $A = M_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_p})$
Alors A est une base de E si et seulement si A est inversible.

4) Représentation matricielle des applications linéaires

a) Définitions

Soit E_p et F_n des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E_p

Soit $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F_n

On définit la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ représentative de a $\in L(E,F)$ relativement aux bases E et F par : $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = M_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_1), \dots, a(\vec{e}_p))$

Remarque : La j ème colonne de $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est constituée des coordonnées de $a(\vec{e}_j)$ dans la base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$. <u>Ainsi, l'expression matricielle d'une application linéaire est sensible aux bases de départ et d'arrivée.</u>

Exemple : Soit f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \to (2y-x+z, 2x-z)$

1) Justifier que f est linéaire (rapidement)
2) Ecrire la matrice de f relative aux bases canoniques B de $\mathbb{R}^3$ et C de $\mathbb{R}^2$
3) Soit B'$= \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$, justifier que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$

   « Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base », pourquoi cette question n'a pas de sens ?

   Compléter la question, et répondre !
4) Soit C'$=\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$, on ne demande pas de démontrer que C' est une base de $\mathbb{R}^2$

   Déterminer $M_{B,C'}(f)$ et $M_{B',C'}(f)$

b) Théorème

Soit E_p et F_n des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E_p

Soit $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F_n

L'application ψ : $L(E_p,F_n) \to \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, $a \to M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est un isomorphisme de $\varkappa$-espaces vectoriels

Remarque : Une application linéaire entre espaces de dimensions finies est entièrement déterminée par sa matrice représentative relatives à des bases de E_p et F_n

c) Corollaire

Soit A$\in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, a : $K^p \to K^n$ l'application définie par : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in K^p$, $a\big((x_1, \dots, x_p)\big) = (y_1, \dots, y_n)$

L'application « a » est dite canoniquement associée à A.

Si $A = Mat_{B,C}(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$, et si $B=(e_1,..,e_p)$ et $C=(f_1,..,f_n)$ alors pour tout j de $[\![1,p]\!]$, on a $f(e_j) = a_{1,j}f_1 + \dots + a_{n,j}f_n$

d) Proposition :

Soit $a \in L(K^p,K^n)$ l'application canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$

Ker(a) est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$

Im(a) est le sous-espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_p})$ canoniquement associés aux colonnes de A.

5) Matrice réduite canonique associée à une application linéaire

Soit $a \in L(K^p,K^n)$ et $r \leq \min(n,p)$

Alors : a est de rang r si et seulement s'il existe des bases E et F telles que $M_{E,F}(a) = J_{n,p,r}$

Où $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{n,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

Démonstration :

Si A est de rang r , soit $u \in L(K^p,K^n)$ canoniquement associée.

On cherche des bases dans lesquelles u est représentée par $J_{n,p,r}$. La forme de la matrice recherchée incite à commencer par déterminer les derniers vecteurs de B puis les premiers vecteurs de C . Comme $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}\, A = r$ alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}u) = p - r$. Soit $e_{r+1},\ldots,e_p$ une base de Keru que l'on complète en une base $B = e_1,\ldots,e_p$ de E.

Soient pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = u(e_i)$. Comme $(e_1,\ldots,e_r)$ est une base d'un supplémentaire de Keru dans E et comme u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de Keru sur Imu (théorème du rang), $f_1,\ldots, f_r$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base C . On a alors bien $\mathrm{Mat}_{B,C}(u) = J_{n,p,r}$. •

Si A est équivalente à $J_{n,p,r}$, alors elles ont même rang. Mais le rang $J_{n,p,r}$ est le rang de la famille de ses colonnes est égal à r : hors colonnes nulles, on a r colonnes de la base canonique, donc libres.

Exemple : Montrer que le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 2.

6) Calcul d'un vecteur, matrice d'une composée

Soient E,F et G des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies rapportées aux bases E,F et G, et $a \in L(E,F)$, on note $A = M_{E,F}(a)$, alors a est un isomorphisme de E sur F si et seulement si A est inversible.

Et alors : $\mathbf{M_{F,E}(a^{-1}) = A^{-1}}$

Soit : $\boldsymbol{a} \in$L(E,F) , on note A = $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$**, et $\boldsymbol{b} \in$L(F,G) , on note B = $M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$(b),**

La composée boa$\in$L(E,G) et $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}$(boa)=BA

7) Changement de bases

a) Matrice de passage

Soit $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ deux bases d'un espace vectoriel, on appelle **matrice de passage de $\mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{E}'$, notée $P_{E\to E'}$**, la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ *dans* $\mathcal{E}$.

Ainsi la matrice de passage correspond à « l'expression des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base »

b) Théorème :
Soit E, F deux $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies
Soit B et B' deux bases de E
Soit C et C' deux bases de F
Soit P = $P_{B\to B'}$,et Q = $P_{C\to C'}$

Si $\vec{x} \in$ E, on note X = $M_B(\vec{x})$, X' = $M_{B'}(\vec{x})$, alors X' = $P^{-1}X$
Ou plus simplement : $\mathbf{X_B = P_{B\to B'}\, X_{B'}}$

(1) Soit a∈L(E), on note A = $M_{B,B}(a)$, A' = $M_{B',B'}(a)$ alors $\mathbf{A' = P^{-1}AP}$

(2) Soit a∈L(E,F), on note A = $M_{B,C}(a)$, A' = $M_{B',C'}(a)$ alors $\mathbf{A' = Q^{-1}AP}$

Mais quand utiliser l'une ou l'autre des deux formules ? Pour la première formule, il y a le même changement de base au départ et à l'arrivée. Tandis que pour la deuxième, il y a un changement de bases au départ et un changement de bases différent à l'arrivée !

Et si on avait : a∈L(E,F), on note A = $M_{B,C}(a)$, A' = $M_{B,C'}(a)$ alors A'= $\mathbf{Q^{-1}AI_n = Q^{-1}A}$

c) Exercice d'application :
Soit f :$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, (x,y,z) →(2x-z,y+z)
On désigne par B et C les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

#Donner $M_{B,C}(f)$

#Soit B' = (e_1',e_2',e_3') et C'=(f_1',f_2') telles que e_1' = (1,0,1) ; e_2'=(0,1,2) ;

e_3'=(1,0,0) et f_1'=(1,1) ; f_2'=(1,-1)

Vérifier que B' est une base de $\mathbb{R}^3$ (on admettra le résultat pour C' base de $\mathbb{R}^2$)

#Donner $M_{B',C'}(f)$

8) Définition
Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ sont dites **semblables s'il existe P∈$GL_n(\varkappa)$ telle que :**
B = $P^{-1}AP$
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ sont dites **équivalentes s'il existe P∈$GL_n(\varkappa)$ et Q∈$GL_p(\varkappa)$ telle que : B = $Q^{-1}AP$**

V. Rang d'une matrice

1) Théorème-définition
Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ une matrice à p colonnes notées : A_1, …, A_p
Si on note $(\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_p})$ les vecteurs canoniquement associés aux colonnes
Soit a l'application linéaire canoniquement associé à A
Alors : Rg(A) = Rg(a) = Rg$(\overrightarrow{a_1},\dots,\overrightarrow{a_p})$
Définition…théorème car cela suppose que deux matrices différentes de la même application linéaire et donc équivalentes ont le même rang

2) Rang de matrices équivalentes
Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, r≤min(n,p), rg(A) = r si et seulement si A est équivalente à $J_{n,p,r}$

3) Caractérisation de l'équivalence
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

4) Rang et opérations élémentaires
On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on effectue une opération élémentaire :
-échanger deux lignes de A
-échanger deux colonnes de A
-remplacer une ligne de A par un multiple non nul de cette ligne.
-remplacer une colonne de A par un multiple non nul de cette colonne.
-ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne
-ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne.

5) Rang et matrices inversibles
Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, le rang de A est l'ordre maximal d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, A est inversible si et seulement si $\mathrm{Rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{n}$
Proposition : Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, alors A et ^{t}A ont même rang.

VI. Trace d'une matrice

1) Définition :
Soit A∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, on appelle trace de A, et on note tr(A) la somme des éléments diagonaux de A. Ainsi : $\mathbf{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

2) Proposition :
Soit (A,B) ∈ $\mathcal{M}_n(\varkappa)^2$, $(\lambda, \mu) \in \varkappa^2$, alors : $\mathrm{tr}(\lambda \mathrm{A} + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(\mathrm{A}) + \mu \mathrm{tr}(\mathrm{B})$
De plus : **tr(AB) = tr(BA)**

3) Corollaire : **Deux matrices semblables ont même trace.**

4) Trace d'un endomorphisme
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, u∈L(E), on appelle trace de u, et on note tr(u), la trace de la matrice représentative de u relative à une base quelconque.

Remarque : pour un projecteur $\mathrm{tr(p)} = \mathrm{Rg(p)}$

Proposition :
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, (u,v)∈L(E)^2, $(\lambda, \mu) \in \varkappa^2$,alors :
$\mathrm{tr}(\lambda \mathrm{u} + \mu v) = \lambda \mathrm{tr}(\mathrm{u}) + \mu \mathrm{tr}(\mathrm{v})$ et $\mathrm{tr(uov)} = \mathrm{tr(vou)}$

Etude d'un exercice classique :
Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(\mathrm{u}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{u})$
2) L'endomorphisme U est-il un projecteur ?