Exercice no 1

a) Montrer que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0.

b) On pose pour $x > 0$:

$$I(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

1. **Intégration par parties :**
   Posons $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. Alors $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.
   $$I(x) = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt = -\frac{\cos x}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$
2. **Convergence de $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$:**
   On a $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann convergente). Par critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$. De plus, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.
3. **Étude de $I(x)$ quand $x \to +\infty$:**
   On étudie le terme $x\cos(1/x)$.
   $$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \implies x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
   En remplaçant dans l'expression de $I(x)$ (en considérant la borne inférieure dépendante de x comme dans le brouillon initial) :
   $$I(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos x}{x} - \int_{1/x}^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$
   Comme l'intégrale tend vers une constante, on conclut que $I(x)$ diverge vers $+\infty$.

Exercice no 2

1) Soit $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ sur l'intervalle $]a, b[$. On pose $x = a + t(b-a)$ avec $t \in]0, 1[$. Alors $dx = (b-a)dt$ et :

$$(b-x)(x-a) = (b-(a+t(b-a)))(a+t(b-a)-a) = (b-a)(1-t)\cdot t(b-a) = (b-a)^2 t(1-t).$$

L'intégrale devient :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int \frac{(b-a)dt}{\sqrt{(b-a)^2 t(1-t)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0, 1[$. **Intégrabilité :** Au voisinage de 0, $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable (Riemann). Idem en 1. L'intégrale converge.

2) On pose $t = \sin^2\theta$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$. $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$. $\sqrt{t(1-t)} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$.

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} 2d\theta = \pi.$$

Exercice no 3

1) Montrer que $t \mapsto t^m e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues. En $+\infty$, $t^m e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable (Riemann).

2) Montrer que $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt$ converge. D'après l'étude asymptotique précédente, l'intégrale converge pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3) Soit $t \mapsto P(t)e^{-t^2}$ où P est un polynôme. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ converge. Par parité, on se ramène à des intégrales de type $t^{2k}e^{-t^2}$ sur $[0, +\infty[$ qui convergent d'après la question 1.

4) a) Calcul de $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt$. Effectuons une intégration par parties en posant : $u(t) = t^{m-1}$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. Alors $u'(t) = (m-1)t^{m-2}$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$.

$$I_m = \left[-\frac{1}{2}t^{m-1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{m-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{m-2}e^{-t^2} dt.$$

Le terme entre crochets est nul (en 0 si $m > 1$, en $+\infty$ par croissance comparée). Ainsi, on obtient la formule de récurrence :

$$I_m = \frac{m-1}{2} I_{m-2}.$$

4) b) Montrer que $I_{2p+1} = 0$ (d'après le corrigé). Considérons l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction impaire $f(t) = t^{2p+1}e^{-t^2}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f est impaire et l'intervalle d'intégration $[-\infty, +\infty]$ est symétrique par rapport à 0. De plus, l'intégrale est convergente (d'après la question 3). Par propriété des fonctions impaires sur un intervalle symétrique, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2} dt = 0.$$

Or, par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$ et imparité de $t \mapsto t^{2p+1}$, le produit est impair, ce qui implique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2} dt = 2I_{2p+1}.$$

On en déduit donc immédiatement que :

$$I_{2p+1} = 0.$$