INP1 Cambrai

Chapitre 11 : Topologie, continuité

M. Calciano

I. Topologie de $\mathbb{R}$

Définitions :

1) Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une propriété portant sur une fonction est dite vraie **au voisinage d'un point** a ($a \in \overline{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a si $a \in \mathbb{R}$, avec un intervalle du type $]c, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle du type $]-\infty, c[$ si $a = -\infty$.

2) Intérieur

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle **intérieur de I, notée** $\mathring{I}$, l'intervalle obtenu en supprimant de I ses éventuelles extrémités.

Ainsi, pour $I = [a, b]$ (a et b réels), $\mathring{I} =]a, b[$.

Pour $I = [a, +\infty[$, $\mathring{I} =]a, +\infty[$.

Exercice n°1 :

Déterminer les intérieurs des intervalles suivants :

$$I = [-2, 3]$$
$$J = [-5, 4[$$
$$K = [2, +\infty[$$

3) Adhérence

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 est dit **adhérent** à A si

$$\forall \delta > 0, \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A \neq \varnothing.$$

On appelle **adhérence d'un intervalle I, notée** $\overline{I}$, l'intervalle de mêmes extrémités que I et contenant les éventuelles extrémités réelles de I.

Pour $I =]a, b[$, on a $\overline{I} = [a, b]$.

Pour $I = [a, +\infty[$, $\overline{I} = [a, +\infty[$.

Exercice n°2 :

Déterminer les adhérences des intervalles suivants :

$$I = [-2, 3]$$
$$J = [-5, 4[$$
$$K = [2, +\infty[$$

4) Théorème

Soit $A \subset \mathbb{R}$, et $x_0 \in A$, alors $x_0 \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x_0.

II. Limites

1) Limites finies

a) Définition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et $L \in \mathbb{R}$.

Si I est non majoré.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \geq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Si I non minoré.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \leq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et $L \in \mathbb{R}$. On considère a un réel de I ou une de ses extrémités.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Exercice n°3 :

Soit $f(x) = x^n$, démontrer que $f(x)$ tend vers 0 pour x tendant vers 0.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $(|x| \leq \eta \Longrightarrow |x^n| \leq \varepsilon)$.

Or $|x^n| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow |x|^n \leq \varepsilon$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Remarque :

On note également : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$.

b) Proposition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration :

On a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-L| \leq \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon = 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-L| \leq 1)$.

Donc pour $x \in I,\ |x-a| \leq \eta$, on a : $|f(x)| \leq 1 + L$.

2) Limites infinies

a) Définition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, a une extrémité de I.

Si a est réel :

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

Si $a = +\infty$:

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

Si $a = -\infty$:

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \leq B \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

Remarque :

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, a une extrémité de I, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers a si $-f(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers a.

3) Théorème d'unicité de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $(L_1, L_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ alors $L_1 = L_2$.

Démonstration :

On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-L_1| \leq \varepsilon).$$

Et :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta_2 \Longrightarrow |f(x)-L_2| \leq \varepsilon).$$

D'où pour $\forall x \in I,\ (|x-a| \leq \min(\eta_1, \eta_2))$, on a $|f(x)-L_1| \leq \varepsilon$ et $|f(x)-L_2| \leq \varepsilon$.

Or $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \leq 2\varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 1/n$ et passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $L_1 = L_2$.

4) Limite et continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que f **est continue** en a.

Dans le cas contraire, on dit qu'elle **est discontinue**.

Démonstration : En fait, le résultat subsiste même si on supposait juste l'existence d'une limite, y compris possiblement infinie !

Supposons que $L = +\infty$ (même raisonnement pour $-\infty$).

On a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ donc

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

Pour $A = f(a) + 1$, on a dans le voisinage de a : $f(x) \geq f(a) + 1$.

En particulier, $f(a) \geq f(a) + 1$, ce qui est impossible.

Donc $L \in \mathbb{R}$.

De $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

En particulier, $|f(a) - L| \leq \varepsilon$, en faisant tendre ε vers 0, on obtient $f(a) = L$.

<u>Exercice n°4 :</u>

Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout point.

Démonstration :

Immédiat car : $\big||x| - |a|\big| \leq |x - a|$.

5) Méthode très utile pour déterminer une limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et L un réel. S'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|f - L| \leq g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Démonstration :

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |g(x)| \leq \varepsilon).$$

De plus, $|f - L| \leq g$, donc $\forall x \in I$, $|f(x) - L| \leq g(x)$.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq |g(x)| \leq \varepsilon).$$

D'où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Exercice n°5 :

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq 0$, montrer que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

En déduire que la fonction racine carrée est continue en a pour $a > 0$.

6) Utilisation des suites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite finie ou infinie L en a. Alors pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Démonstration : (nous traitons ici le cas d'une limite finie)

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

De plus : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - a| \leq \varepsilon.$$

Donc pour $\varepsilon = \eta$, on a $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - a| \leq \eta$ et $|f(x_n) - L| \leq \varepsilon$.

Exercice n°6 :

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limites en $+\infty$.

Démonstration :

Supposons que le sinus ait une limite en $+\infty$. Alors $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ et $\sin(\pi + 2n\pi)$ auraient la même limite.

Or $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$ et $\sin(\pi + 2n\pi) = 0$. Contradiction.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$, alors la fonction f a pour limite L en a.

Démonstration :

Il y aurait 9 cas à distinguer. On va traiter ici le cas où $a = +\infty$ et L est finie.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Supposons que f n'ait pas L comme limite en $+\infty$, alors :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A \text{ tel que } |f(x) - L| > \varepsilon.$$

En particulier pour $A = n$, et en faisant varier n dans $\mathbb{N}$, on construit une suite (x_n) vérifiant $|f(x_n) - L| > \varepsilon$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (par minoration) et le passage à la limite dans $|f(x_n) - L| > \varepsilon$ donne $0 > \varepsilon$. Absurde !

III. Limites et continuité à gauche, à droite

1) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.

La fonction f est continue à droite en a, si $f_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.

La fonction f est continue à gauche en a, si $f_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.

Exercice n°7 :

La fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2) Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.

Alors la fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de a.

3) Limite à droite et à gauche

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I, autre que l'extrémité supérieure de I.

La limite à droite de f en a, notée $\lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, est la limite de $f_{I\cap[a,+\infty[}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I, autre que l'extrémité inférieure de I.

La limite à gauche de f en a, notée $\lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, est la limite de $f_{I\cap]-\infty,a]}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Exercice n°8 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \mathrm{sh}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Démonstration :

On a : $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \sin(x) = 0.$

Et : $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \mathrm{sh}(x) = 0.$

Donc f est continue en 0.

4) Proposition

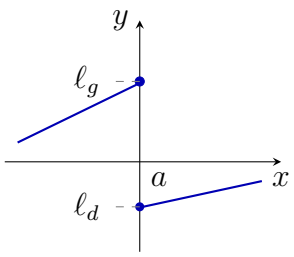
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I. Alors la fonction f est continue à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

De même pour la continuité à gauche.

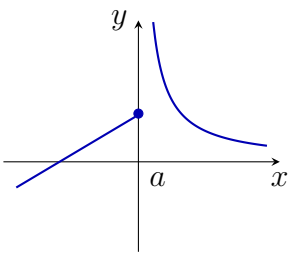
Remarque

On parle de discontinuité de première espèce si la fonction admet une limite à gauche et une limite à droite finies, mais de valeurs différentes.

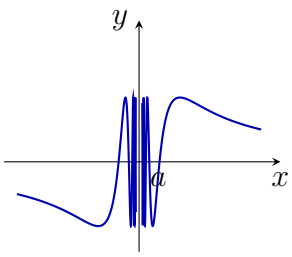
On parle de discontinuité de seconde espèce si au moins l'une des deux limites à gauche ou à droite n'existe pas ou est infinie.



(a) Première espèce



(b) Seconde espèce



(c) Seconde espèce

Figure 1 – Exemples de discontinuités

5) Théorème de prolongement par continuité

Soit $a \in I$, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Il existe une fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a prolongeant f sur I si et seulement si f admet une limite finie en a.

Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Démonstration :

Si un tel prolongement existe, il sera unique par construction et par l'unicité de la limite.

Et $\lim\limits_{x \to a} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to a,\ x \in I \setminus \{a\}} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to a,\ x \in I \setminus \{a\}} f(x) = \widetilde{f}(a)$.

Montrons que ce prolongement est continu. Soit $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Comme $\widetilde{f}(a) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout x de $I \setminus \{a\}$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$, on a :

$$|\widetilde{f}(x) - L| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| \leq \varepsilon.$$

Exercice n°9 :

Soit f définie par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer le prolongement par continuité $\widetilde{f}$ de f.

Démonstration :

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc $\widetilde{f}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{f}(0) = 1 \\ \widetilde{f}(x) = f(x) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

est le prolongement de f par continuité.

6) Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I.

7) Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur I, et α un réel.

Les fonctions $f + g$ et αf sont continues sur I.

Le produit fg est continu sur I.

Si, de plus, f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration : Évidente avec la caractérisation séquentielle de la continuité.

On peut alors dresser une liste de fonctions usuelles continues :

L'exponentielle, la racine carrée, le logarithme, les polynômes sont continus sur leur domaine de définition.

Le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est également continu.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Le théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles, et a et b deux points de I. Alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f.

Démonstration :

Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$. On cherche c entre a et b tel que $y = f(c)$.

On peut supposer que $f(a) \leq y \leq f(b)$.

On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Et :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

En effet :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ et tend vers 0.

De plus :

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \frac{b_n-a_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

De même, on montrerait que $b_{n+1} - b_n \leq 0$.

Donc les deux suites convergent. Notons c leur limite commune.

On a $f(c) \leq y$ et $f(c) \geq y$ donc $f(c) = y$.

2) Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et strictement monotone sur I, à valeurs réelles, et a et b deux points de I. Alors pour toute valeur y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel x entre a et b tel que $y = f(x)$.

3) Conséquence fondamentale

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

Soit $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ avec $\alpha \leq \beta$. Par le TVI, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

On conclut que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice n°10 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Démonstration :

Supposons que f ne soit pas constante. Il existe $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ avec $\alpha \neq \beta$.

Si $f(a) = -f(b)$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Par le TVI, il existe c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Sinon, on a alors $|f(a)| \neq |f(b)|$ et $|f|$ non constante. Contradiction.

4) Quelques conséquences immédiates du TVI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, a et b deux points de I. Alors si $f(a)f(b) \leq 0$, il existe un réel c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Si f ne s'annule jamais sur I, alors f est de signe constant sur I.

5) Théorème des bornes atteintes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

6) Image d'un segment par une fonction continue

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration :

Soit f continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Soit m et M les minimum et maximum.

D'après le TVI, $f([a, b])$ est un intervalle et clairement $f([a, b]) \subset [m, M]$.

Et comme m et M sont dans $f([a, b])$, donc $f([a, b]) = [m, M]$.

7) Théorème de la bijection

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, une fonction continue et strictement monotone. Alors :

La fonction f définit une bijection de I sur $f(I)$.

Et f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Démonstration :

Si f est strictement croissante, si $x < y$, supposons que $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$. Alors

$f(f^{-1}(x)) > f(f^{-1}(y))$, et $x > y$ absurde.

Donc f^{-1} a la même monotonie.

De plus $f^{-1}(J)$ est un intervalle. Or si $f^{-1}(J)$ est un intervalle alors f^{-1} est continue.

8) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle non réduit à un point.

Si f est injective, alors f est strictement monotone.

Démonstration (sous forme d'exercice)

On suppose qu'il existe $(x_1, y_1) \in I^2$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) > f(y_1)$ et $(x_2, y_2) \in I^2$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leq f(y_2)$.

On définit la fonction φ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$.

Montrer que φ s'annule sur $]0, 1[$.

Conclure.

V. Compléments sur les limites

1) Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

2) Calcul algébrique de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de limites respectives L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a.

Alors $f + g$ a pour limite $L + L'$.

Alors si α désigne un réel, αf tend vers αL lorsque x tend vers a.

Alors fg tend vers LL' lorsque x tend vers a.

Si $f : I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite L lorsque x tend vers a, avec $L \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}$.

Si $f : I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Si $f : I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite 0, en restant de signe constant strictement positif (resp strictement négatif) lorsque x tend vers a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp $-\infty$).

3) Composition de limites

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $f : I \to J$.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $b \in J$ ou b est une extrémité de J.

De plus si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = L$.

VI. Exercices

Exercice 1 :

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$.
6. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{5x^3-x^2+2}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$.

Soit n un entier relatif. Déterminer, si elles existent, $\lim\limits_{x\to n,\ x<n} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to n,\ x>n} f(x)$.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue ?

Exercice 4 :

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 5 :

Soient f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues en $a \in I$.

Démontrer que les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue en tout point.

Exercice 7 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Z}$. Démontrer que f est constante.

Exercice 8 :

1. Montrer que toute fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Démontrer que f est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.

Exercice 11 :

Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$.

1. Que vaut, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$?
2. Démontrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire une majoration de $|\ln(2) - f(x)|$.
4. Quelle est $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, telle qu'il existe un réel a vérifiant $f(f(a)) = a$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.

Exercice 13 :

Démontrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.

1. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bornée.
2. Cette proposition est-elle encore vraie si on remplace $[a, b]$ par un intervalle I quelconque ? Illustrer votre propos.
3. On suppose de plus que f est lipschitzienne sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est également lipschitzienne.

Exercice 15 :

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 16 :

Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (E(x))^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x)).$$

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 :

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 18 :

Cet exercice nécessite de savoir que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que dans n'importe quel intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ne comportant pas un seul élément (donc au moins deux éléments), on peut trouver un rationnel (donc appartenant à $\mathbb{Q}$).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. Établir que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
4. Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 19 :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in I$, $|f(x)| = |g(x)| \neq 0$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 20 :

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) < g(x)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 21 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.
3. f est-il un homéomorphisme ? (à savoir f bijective, f continue et f^{-1} continue)

Exercice 22 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et en 1 et vérifiant pour tout réel x : $f(x) = f(x^2)$.

Montrer que f est constante.

Exercice 23 : `https://youtu.be/B1ni5mAGles`

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, 1[\\ x - 1 & \text{si } x \in [2, 3[\end{cases}$$

1. Montrer que f définit une bijection réciproque, continue et strictement croissante de son domaine de définition sur $]0, 2[$.
2. Son application réciproque est-elle continue ?

Exercice 24 :

Soient u et v deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $u(0) = v(1) = 0$ et $u(1) = v(0) = 1$.

Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $u(x) = v(x)$.

Problème n°1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) Montrer que
$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) + x\big) = 0$$
   (b) En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, montrer que l'équation

$$f(x) = n$$

admet deux solutions de signes contraires. La solution positive sera notée a_n.
4. Étudier les variations de la suite (a_n).
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$a_n \geq \ln(n)$$

En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

Problème n°2

On définit la fonction cotangente hyperbolique, notée coth, par :

$$\coth(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de coth.
2. Montrer que coth est impaire.
3. Résoudre l'équation $\coth(x) = 1$.
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de coth.
5. Déterminer $\coth'$ en fonction de sh puis en fonction de coth.
6. Déterminer une primitive de coth.
7. Établir que coth réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. On note Argcoth cette bijection réciproque.
8. Justifier que Argcoth est dérivable sur $]1, +\infty[$.
9. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\mathrm{Argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

10. Exprimer $\mathrm{Argcoth}(x)$ en fonction de x.

Problème n°3 (Équations différentielles)

Résoudre, par variations des constantes, les équations différentielles suivantes :

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-2t}}$$

$$y'' + 4y = \tan t$$