Chapitre 4 : Compléments sur séries numériques

M. Calciano

I. Rappels de première année

1 – Définition

Étant donné une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (nombres réels ou complexes), on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série de terme général** u_n. On la note simplement $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée **somme partielle d'indice** n de $\sum u_n$.

Remarque : il est très facile de retrouver u_n à partir de S_n : en effet, $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$.

2 – Convergence

a) Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles (S_n) l'est.

Dans ce cas, la **somme de la série** est la limite des sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est **divergente**.

Exemple : Soit $u_n = 3^n$ (suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$). Alors

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

et $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Donc la série $\sum 3^n$ diverge.

b) Théorème dit de condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Attention : la convergence du terme général vers 0 ne suffit pas à établir la convergence de la série.

Exemple (contre-exemple classique) : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ vérifie $\frac{1}{n} \to 0$, et pourtant elle diverge (voir I.7 et l'exercice n°1).

c) Théorème de comparaison suite-série

Soient (a_n) et (u_n) deux suites numériques telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_{n+1} - a_n$.
Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0.$$

On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ est **télescopique** : c'est en pratique la première chose à tester lorsqu'un terme général se décompose naturellement en différence de deux termes consécutifs.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$. En posant $a_n = -\dfrac{1}{n}$, on a $u_n = a_{n+1} - a_n$, et (a_n) converge vers 0, donc $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = 0 - (-1) = 1.$$

3 – Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Le **reste d'indice** n de $\sum u_n$ est défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$. De plus, la suite (R_n) converge vers 0.

4 – Comparaison (séries à termes positifs)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $0 \leq u_n \leq v_n$.

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

— Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : il suffit de revenir aux sommes partielles, qui sont croissantes (car les termes sont positifs) et majorées par $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *dans le premier cas.*

Exemple : Comme $0 \leq \dfrac{1}{1+2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que $\sum \frac{1}{1+2^n}$ converge.

5 – Règle dite des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes toutes les deux).

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$*, alors il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n$*, et on revient aux sommes partielles.*

Exemple : $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge (télescopique), donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Attention : cette règle est **fausse** pour des séries de signe quelconque, y compris pour des séries alternées (voir III.4 pour un contre-exemple détaillé) : $u_n \sim v_n$ n'entraîne *pas* en général que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient de même nature dès que les termes changent de signe.

6 – Règle dite des comparaisons (notations de Landau)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

— Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

— Si $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

— Par contraposée : si $\sum u_n$ diverge et $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$), alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple : Pour étudier $\sum \dfrac{n+\cos n}{n^3+1}$, on remarque que $\dfrac{n+\cos n}{n^3+1} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (numérateur borné par $2n$, dénominateur équivalent à n^3). Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série étudiée converge. On notera que la règle des équivalents (I.5) ne s'applique pas directement ici car il n'y a pas d'équivalent simple évident, alors que la domination $O(\cdot)$ suffit.

7 – Comparaison série-intégrale (1)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors $\forall k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt.$$

Par sommation :

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt.$$

Cette double inégalité fournit un **encadrement explicite** de la somme partielle $\sum_{k=0}^n f(k)$ par deux intégrales que l'on sait souvent calculer, ce qui permet d'obtenir un *équivalent* de cette somme (série divergente) ou du *reste* R_n (série convergente), et pas seulement la nature de la série.

Exemple : pour $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ (positive, décroissante), on obtient $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$, ce qui redonne la divergence de la série harmonique et l'équivalent $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

8 – Séries de référence

Séries géométriques : Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Séries de Riemann : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : ces deux familles constituent les séries de référence *à connaître par cœur*, car la quasi-totalité des séries de ce chapitre s'étudient in fine par comparaison (équivalent, domination) à l'une d'entre elles.

9 – Règle de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes de signe constant (au moins à partir d'un certain rang).

— S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, **alors** $\sum u_n$ **converge.**

— S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to L \in \mathbb{R}^*$ lorsque $n \to +\infty$, **alors** $\sum u_n$ **converge.**

— S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \to L \in \mathbb{R}^*$ lorsque $n \to +\infty$, **alors** $\sum u_n$ **diverge.**

— S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \to \pm\infty$ lorsque $n \to +\infty$, **alors** $\sum u_n$ **diverge.**

Exemple : pour $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$, on a $n^{3/2}u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, donc $\sum u_n$ converge.

Exercice : Soit $\sum u_k$ avec $u_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$. Déterminer la convergence de la série par :

— comparaison avec une série de Riemann,

— application de la règle de Riemann.

Un élève écrit : $\dfrac{k}{(k+1)(k+2)} \to 0$, donc $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = o\left(\frac{1}{k}\right)$ et la série diverge. Que peut-on en penser ?

10 – Règle de D'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ converge et on note L sa limite.

— Si $L > 1$: $\sum u_k$ diverge.

— Si $L < 1$: $\sum u_k$ converge.

— Si $L = 1$: on ne peut pas conclure avec ce critère.

Exercice : Démontrer que pour tout $x > 0$, $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge (il s'agit de l'exponentielle).

Contre-exemple pour $L = 1$: les séries $\sum \frac{1}{n}$ (divergente) et $\sum \frac{1}{n^2}$ (convergente) vérifient toutes deux $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$: la règle de D'Alembert est donc muette dans ce cas, et il faut alors utiliser une autre méthode (équivalent, Riemann, comparaison série-intégrale...).

II. Absolue convergence

1 – Définition

Une série $\sum u_k$ est absolument convergente dès que $\sum |u_k|$ converge

Rappel fondamental : toute série absolument convergente est convergente (résultat admis, conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La réciproque est fausse : une série peut converger sans converger absolument, on parle alors de **semi-convergence** (exemple typique : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, voir III.2 et l'exercice n°16).

2 – Comparaison d'une série complexe à une intégrale (2)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que f' soit intégrable sur $[a,+\infty[$. Alors la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$$

est absolument convergente.

Démonstration : À partir de $n_0 > a$, on a par intégration par parties :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\,dt.$$

Donc

$$w_n = (n-1)(f(n)-f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\,dt = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\,dt.$$

On en déduit $|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,dt$. Or f' est intégrable, donc la série de terme général $\int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,dt$ converge, et par majoration, $\sum |w_n|$ converge.

Comment s'en servir : le résultat lui-même ne dit rien sur la nature de $\sum f(n)$! Il dit seulement que $\sum f(n)$ est de **même nature** que la série des intégrales $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$ (puisque $f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - w_n$ et que $\sum w_n$ converge). En pratique, on choisit f pour que la suite des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \int_{n_0-1}^{n} f(t)\,dt$ soit facile à étudier (primitive explicite, limite connue).

I.7 contre II.2 : quelle formule utiliser ? Ces deux résultats répondent à des besoins différents, et il ne faut pas les confondre. Le résultat I.7 (f réelle, **positive et décroissante**) donne un *encadrement explicite* de la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ par deux intégrales : on l'utilise quand on veut un **équivalent** de la somme partielle (série divergente) ou du reste R_n (série convergente), et que le terme général est **positif et monotone** (au moins à partir d'un certain rang). Le résultat II.2 (f de classe C^1, f' intégrable, **aucune hypothèse de signe ni de monotonie**) ramène l'étude de $\sum f(n)$ à celle de $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$, à une erreur absolument convergente près : on l'utilise quand le terme général **oscille** (change de signe, contient un cos, un sin, un facteur $(-1)^n$...), car I.7 est alors **inapplicable** faute de monotonie, et qu'on veut seulement la **nature** de la série, la primitive de f faisant apparaître une limite (finie ou non) facile à étudier.

3 – Exemples de mise en œuvre de II.2

a) Premier exemple : $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ $(n \geq 1)$

On veut montrer que la série $\sum u_n$ **converge**, bien que I.7 ne s'applique pas.

Pourquoi I.7 échoue. La fonction $f(t) = \frac{\cos t}{t}$ n'est pas positive sur $[1,+\infty[$ (elle change de signe à chaque $\pi/2$) et n'y est pas décroissante (sa dérivée change de signe indéfiniment). Les deux hypothèses « positive » et « décroissante » de I.7 ne sont donc pas vérifiées : l'encadrement de I.7 n'a aucun sens pour cette fonction.

Vérification des hypothèses de II.2, une à une.

— **Domaine et régularité :** $f : t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est définie et de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ (quotient de fonctions C^1, dénominateur non nul). L'hypothèse « f de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ » est vérifiée avec $a = 1$.

— **Calcul de f' et intégrabilité :** on a

$$f'(t) = \frac{-t\sin t - \cos t}{t^2} = -\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}.$$

Il faut montrer que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ converge.

— Le terme $-\frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable en valeur absolue par majoration directe : $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann).

— Le terme $-\frac{\sin t}{t}$ n'est *pas* intégrable en valeur absolue (on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = +\infty$), mais il est *intégrable au sens impropre* : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge (intégrale semi-convergente classique, obtenue par intégration par parties : $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,dt$, et les deux termes du membre de droite ont une limite finie quand $X \to +\infty$).

La somme de deux fonctions intégrables au sens impropre (l'une absolument, l'autre semi-convergentiellement) est intégrable au sens impropre : f' est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. L'hypothèse « f' intégrable » de II.2 est vérifiée.

Conclusion. Les hypothèses de II.2 étant toutes vérifiées, la série $\sum f(n) = \sum \frac{\cos n}{n}$ est de même nature que la série $\sum \int_{n-1}^n \frac{\cos t}{t}\,dt$. Or

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_1^n \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge (même argument d'intégration par parties que ci-dessus). La suite des sommes partielles $\left(\int_1^n \frac{\cos t}{t}\,dt\right)_n$ converge donc, et par II.2 la série $\sum \frac{\cos n}{n}$ converge. (On peut même montrer qu'elle ne converge pas absolument, car $\sum \frac{|\cos n|}{n}$ diverge, mais ce n'est pas l'objet ici.)

b) Second exemple : $u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ $(n \geq 1)$

On veut montrer que la série $\sum u_n$ **diverge**.

Pourquoi I.7 échoue. La fonction $f(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}$ change de signe (le facteur $\sin(\ln t)$ oscille) et n'est pas monotone sur $[1, +\infty[$. Les hypothèses de I.7 ne sont pas vérifiées.

Vérification des hypothèses de II.2, une à une. On travaille sur $]1, +\infty[$ (pour éviter le $\ln 1 = 0$ au dénominateur de f', et ln est bien défini).

— **Domaine et régularité :** $f : t \mapsto \frac{\sin(\ln t)}{t}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions C^1 (ln est C^1 sur $]0, +\infty[$, sin est C^1 sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto 1/t$ est C^1 sur $]0, +\infty[$). Hypothèse vérifiée.

— **Calcul de f' et intégrabilité :** on a

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t} \cdot t - \sin(\ln t) \cdot 1}{t^2} = \frac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2}.$$

On majore

$$|f'(t)| \leq \frac{|\cos(\ln t)| + |\sin(\ln t)|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ (Riemann, exposant $2>1$). Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, f' est intégrable sur $]1,+\infty[$. Hypothèse vérifiée.

Conclusion. Les hypothèses de II.2 étant vérifiées, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec $v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$. Or, par le changement de variable $u = \ln t$ (donc $du = dt/t$),

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \int_1^n \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt = \int_0^{\ln n} \sin u\,du = [-\cos u]_0^{\ln n} = 1 - \cos(\ln n),$$

qui n'a pas de limite quand $n \to \infty$ (la suite $(\cos(\ln n))_n$ n'a pas de limite : $\ln n$ parcourt des intervalles de plus en plus grands, et cos y oscille entre -1 et 1). La suite des sommes partielles de $\sum v_n$ diverge donc, et par équivalence de nature, $\sum u_n$ diverge.

III. Compléments

1 – Formule de Stirling

$$n! \sim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Application : Donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Indication : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; en appliquant Stirling au numérateur et au dénominateur, on trouve $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

2 – Séries alternées

a) Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ est **alternée** si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

b) Théorème (CSSA – Critère spécial des séries alternées)

Si $\sum u_n$ est alternée, si le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge. De plus, $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration : Quitte à changer u_n en $-u_n$, on peut supposer $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$. On a :

$$S_{2n+2} = S_{2n} - v_{2n+1} + v_{2n+2}, \quad S_{2n+3} = S_{2n+1} - v_{2n+3} + v_{2n+2}.$$

La décroissance de v_n donne $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ et $S_{2n+1} \leq S_{2n+3}$. De plus $S_{2n+1} - S_{2n} = v_{2n+1} \to 0$. Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc (S_n) converge.

Application : Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Attention aux trois hypothèses : le CSSA exige *simultanément* l'alternance de signe, la décroissance en valeur absolue **et** la limite nulle. Il ne suffit pas que le terme général tende vers 0 en alternant de signe : on retrouve ce type de piège en III.4 et en V, où l'on manipule directement un développement asymptotique plutôt que le CSSA brut.

c) Exemple d'application du théorème de « maîtrise » du reste

Pour approcher $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-2} près, il suffit (voir exercice n°6.1) de trouver n tel que $\dfrac{1}{n+1}\leq 10^{-2}$, soit $n\geq 99$: c'est beaucoup plus efficace, pour une série alternée, que d'estimer le reste par une comparaison série-intégrale.

3 – Règle de D'Alembert (généralisée)

Soit (u_n) une suite à termes non nuls (à partir d'un certain rang) telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}.$$

— Si $L<1$: la série converge absolument (et donc converge).

— Si $L>1$: la série diverge grossièrement.

— Si $L=1$: cas douteux.

Démonstration : Si $L<1$, choisissons $\rho\in]L,1[$. Il existe n_0 tel que $\forall n\geq n_0$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leq\rho$. Par récurrence, $|u_n|\leq|u_{n_0}|\rho^{n-n_0}$, d'où la convergence absolue. Si $L>1$, choisissons $\rho\in]1,L[$, alors $|u_n|\geq|u_{n_0}|\rho^{n-n_0}$, donc divergence.

Application : Pour $z\in\mathbb{C}^*$, démontrer la convergence absolue de $\sum\frac{z^n}{n!}$.

Remarque : c'est cette version *à valeurs complexes* (ou réelles de signe quelconque) qui permet de traiter directement des séries comme $\sum\frac{z^n}{n!}$ sans revenir explicitement à $\sum\frac{|z|^n}{n!}$: la version de I.10 (termes positifs) ne s'applique littéralement qu'après passage à la valeur absolue.

4 – Remarque importante

Il est possible d'avoir des séries alternées dont les termes sont équivalents, par exemple $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$. Cependant, la convergence de l'une n'entraîne pas celle de l'autre !

Justification : $\sum u_n$ converge par CSSA ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers 0). En revanche $v_n-u_n=\frac{1}{n}$, donc si $\sum v_n$ convergeait, $\sum\frac{1}{n}$ convergerait aussi par différence de deux séries convergentes – ce qui est faux. Donc $\sum v_n$ diverge, bien que $u_n\sim v_n$. Ceci illustre concrètement pourquoi la règle des équivalents (I.5) est réservée aux séries à termes **positifs**.

IV. Techniques de comparaison

1 – Comparaison série-intégrale avec décroissance

Soit $f\in C^0_{\text{pm}}([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante et intégrable. Alors la série $\sum f(n)$ converge. De plus,

$$\int_n^{+\infty}f(t)\,dt\leq\sum_{k=n}^{+\infty}f(k)\leq f(n)+\int_n^{+\infty}f(t)\,dt.$$

Lien avec I.7 : il s'agit du même principe d'encadrement que I.7, appliqué ici directement à l'infini (f intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $\sum f(n)$ converge automatiquement), et utilisé pour encadrer le **reste** $R_{n-1}=\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ plutôt que la somme partielle.

Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha>1$.

Corrigé rapide : avec $f(t)=\frac{1}{t^\alpha}$ (positive, décroissante, intégrable sur $[n,+\infty[$ car $\alpha>1$), $\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, et l'encadrement ci-dessus donne directement

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\sim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

2 – Produit de Cauchy de deux séries

a) Définition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. Le **produit de Cauchy** est la série de terme général

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}.$$

b) Théorème

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

Démonstration : Notons $U_n=\sum_{k=0}^n u_k$, $V_n=\sum_{k=0}^n v_k$, $W_n=\sum_{k=0}^n w_k$, et $U=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$, $V=\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$. On a

$$W_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}u_j v_{k-j}=\sum_{j=0}^{n}u_j\left(\sum_{i=0}^{n-j}v_i\right)=\sum_{j=0}^{n}u_j V_{n-j}.$$

Alors

$$W_n-U_nV=\sum_{j=0}^{n}u_j(V_{n-j}-V)+V\sum_{j=0}^{n}u_j-U_nV=\sum_{j=0}^{n}u_j(V_{n-j}-V)+(U_n-U)V.$$

Le second terme tend vers 0. Pour le premier, soit N fixé et séparons la somme en $j\le N$ et $j>N$:

$$\left|\sum_{j=0}^{n}u_j(V_{n-j}-V)\right|\le\sum_{j=0}^{N}|u_j|\,|V_{n-j}-V|+\sum_{j=N+1}^{n}|u_j|\,|V_{n-j}-V|.$$

La première somme tend vers 0 quand $n\to+\infty$ (à N fixé, chaque $V_{n-j}\to V$) ; la seconde est majorée par $2M\sum_{j>N}|u_j|$ où $M=\sup_n|V_n-V|$ (borné car V_n converge). Comme $\sum|u_j|$ converge, ce majorant peut être rendu arbitrairement petit en choisissant N grand. Donc $W_n\to UV$.

Enfin, pour l'absolue convergence, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{n}|w_k| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}|u_j|\,|v_{k-j}| = \sum_{j=0}^{n}|u_j|\left(\sum_{i=0}^{n-j}|v_i|\right) \leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty}|u_j|\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|v_i|\right),$$

donc la suite des sommes partielles de $\sum|w_n|$ est croissante et majorée : elle converge.

Attention : la convergence absolue des *deux* séries est indispensable pour que la formule soit valable ; sans cette hypothèse, le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut très bien diverger.

Exercice classique : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n.$$

Corrigé rapide : on applique le produit de Cauchy à $u_n = v_n = a^n$ (chacune absolument convergente car $|a| < 1$) : $w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} = (n+1)a^n$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum a^n\right)^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2}$.

V. Développement asymptotique

Technique utile pour les séries à termes quelconques. On conclut sur la nature en donnant un développement asymptotique du terme général, dont chaque morceau relève d'un critère déjà connu (CSSA pour un terme alterné dominant, absolue convergence par comparaison à une série de Riemann pour les termes suivants).

Exemple : Série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. La suite n'est pas décroissante, donc CSSA non applicable. Développement limité à deux termes :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le premier terme $\frac{(-1)^n}{n}$ donne une série convergente (CSSA : la suite $1/n$ décroît vers 0), le second terme $\frac{1}{n^2}$ donne une série absolument convergente (Riemann, exposant $2 > 1$). Le reste $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est dominé par $\frac{1}{n^2}$, donc absolument convergent. La série initiale converge donc.

Point de méthode : il ne faut pousser le développement asymptotique que jusqu'à obtenir, pour *chaque* terme, soit un terme alterné auquel le CSSA s'applique sans ambiguïté, soit un terme dominé par une série de Riemann convergente. Ici, deux termes suffisent : le terme alterné $\frac{(-1)^n}{n}$ (convergent par CSSA) et le terme $\frac{1}{n^2}$ (absolument convergent par Riemann), le reste étant négligeable devant ce dernier. S'arrêter au seul terme $\frac{(-1)^n}{n}$ aurait laissé un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ dont on n'aurait rien pu dire (signe inconnu, pas de critère applicable).

VI. Une application intéressante : l'exponentielle

1 – Définition

Pour tout $u \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme est appelée **exponentielle** de u, notée $\exp(u)$:

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Démonstration : $\left|\frac{u^n}{n!}\right| \leq \frac{|u|^n}{n!}$ *et on applique le critère de D'Alembert à* $\sum \frac{|u|^n}{n!}$.

2 – Propriété fondamentale

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z+z') = \exp(z)\,\exp(z').$$

Démonstration :

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \exp(z+z').$$

Remarque : cette démonstration est un exemple d'application directe du produit de Cauchy (IV.2) à deux séries absolument convergentes, ce qui justifie *a posteriori* la manipulation formelle du double indice $k, n-k$ sans se soucier de l'ordre de sommation.

VII. Exercices

Exercice n°1

1) En utilisant la comparaison avec une intégrale, démontrer que la série harmonique diverge.
2) Toujours avec la même méthode, prouver l'existence d'un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

(Comment s'appelle ce réel γ ?)

3) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice n°2 Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n>0} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice n°3 Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
2) a) Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   b) Déterminer un équivalent du reste d'indice n de la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

Exercice n°4 (oraux de concours) – Les deux questions sont indépendantes.

1. Après en avoir justifié l'existence, calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
sachant que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
2. Soit $\alpha > 0$. Préciser la nature de la série
$$\sum_{n\geq 2} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$
pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice n°5 Pour chacune des séries, justifier l'existence et effectuer le calcul de la somme :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)$

Exercice n°6 Les trois questions suivantes sont indépendantes :

1) On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$. Justifier la convergence de cette série. On note S sa somme, S_n sa somme partielle. Déterminer n pour que $|S - S_n| \leq 10^{-2}$.
2) Déterminer la nature de la série de terme général $\cos\Big(n^2\pi \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big)$. *Indication : faire un DL à l'ordre 4 en 0 de* $\ln(1-x)$.
3) a) Préciser la nature de la série de terme général $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ en fonction des réels a et b.
   b) Calculer alors sa somme.

Exercice n°7 Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

Exercice n°8 Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$.

Exercice n°9 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$
Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge, et si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge. *Indication : poser* $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$ *et* $v_n = n^\beta u_n$.

Exercice n°10 (oraux de concours) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$
alors la série
$$\sum u_n$$
converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$
puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}?$$

Exercice n°11 (concours) Soit $\alpha \in]0, \pi]$.

On souhaite démontrer la convergence et calculer la somme des séries :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

a. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0. Calculer I_0, et $I_n + I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

c. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. On pose, pour $t \in [\alpha, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$$

a. Montrer : $S_n(t) = \varphi(t)\left(e^{i(n+1)t} - e^{it}\right)$. Exprimer $\varphi(t)e^{it}$ en fonction de $\frac{e^{it/2}}{\sin(t/2)}$.

b. Montrer : $\int_\alpha^\pi \varphi(t)e^{i(n+1)t}\, dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. *(indication : on pourra utiliser une intégration par parties)*

c. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge, et :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} = -\ln(2) + i\int_\alpha^\pi \varphi(t)e^{it}\, dt$$

d. En déduire la convergence et la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.

Exercice n°12 En utilisant la comparaison série-intégrale, donner la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice n°13 l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer
$$\lim_{a\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

Exercice n°14 On souhaite former un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1) Justifier que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
2) Montrer que $\frac{1}{n}$ est le reste de la série convergente $\sum \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.
3) Soit $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$. Montrer que $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}$.
4) Montrer par comparaison avec une intégrale que $d_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
5) Conclure.

Exercice n°15

1) Justifier que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
2) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
   a) Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
   b) Déterminer un équivalent de R_n (indication : évaluer $R_n - R_{n+1}$).
   c) Donner la nature de $\sum_{n\geq 1} R_n$.

Exercice n°16 – Autour de D'Alembert (les deux questions sont indépendantes)

1) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$?
2) Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Établir que $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge. *Indication : poser $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ et remarquer que $z_n = S_n - S_{n-1}$.*

Exercice n°17 (oraux de concours) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3) Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4) Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5) En déduire la nature de $\sum u_n$.