Chapitre : « Déterminants »

I. Déterminant d'une matrice

1) Définition

Soit A=$(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\varkappa)$, on appelle **déterminant de A**, notée det(A), et on note det(A) = $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, la quantité définie par récurrence de la façon suivante :

Si n=2, alors det(A) = $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2}$ - $a_{1,2} \times a_{2,1}$

Si n>2, alors det(A) = $\sum_{i\in[\![1,n]\!]}(-1)^{i+1}a_{i,1}\det(A_{i,1})$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A, en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Donc, dans cette définition, le déterminant se développe uniquement par rapport à la première colonne, on verra un peu après, qu'on peut le développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Exemple :

Pour A = $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 6-8 = -2

Pour B = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 2-4 + 2 = 0

2) Proposition

Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes.

Ainsi pour tout $\alpha \in K$,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots \alpha a_{1,j} + b_1 \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots \alpha a_{n,j} + b_n \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots a_{1,j} \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots a_{n,j} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots b_1 \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots b_n \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque: De façon générale, det(αA+B) ≠ αdet(A)+det(B)

Démonstration : Evidente lorsqu'on aura vu que le déterminant peut se développer par rapport à n'importe quelle colonne j.

3) Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit des éléments de la diagonale.

Démonstration : Immédiate par récurrence !

4) Propriétés

Si A possède deux colonnes identiques alors det(A) = 0

Si on permute deux colonnes de A, alors le déterminant est modifié en son opposé

Remarque : Les propriétés restent vraies en remplaçant le mot colonne par ligne.

Démonstration :
Par récurrence, en développant selon une colonne non identique aux deux premières, et en précédant la proposition du 4)

Pour le deuxième point, en désignant par $C_1, C_2, \ldots C_n$ les colonnes de A, il suffit alors de développer $\det(C_1+C_2, C_1+C_2, C_3, \ldots C_n)$...
En effet, $\det(C_1+C_2, C_1+C_2, C_3, \ldots C_n) = 0$ or $\det(C_1+C_2, C_1+C_2, C_3, \ldots C_n) = \det(C_1, C_1+C_2, C_3, \ldots C_n) + \det(C_2, C_1+C_2, C_3, \ldots C_n) = \det(C_1, C_1, C_3, \ldots C_n) + \det(C_1, C_2, C_3, \ldots C_n) + \det(C_2, C_1, C_3, \ldots C_n) + \det(C_2, C_2, C_3, \ldots C_n) = 0 + \det(C_1, C_2, C_3, \ldots C_n) + \det(C_2, C_1, C_3, \ldots C_n) + 0$
Donc $\det(C_1, C_2, C_3, \ldots C_n) + \det(C_2, C_1, C_3, \ldots C_n) = 0$ et $\det(C_1, C_2, C_3, \ldots C_n) - \det(C_2, C_1, C_3, \ldots C_n)$

5) Proposition (admise)
Le déterminant d'une matrice A peut se développer par rapport n'importe quelle ligne ou colonne.
Ainsi :
Par rapport à la colonne j :
$\det(A) = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A, en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Ou par rapport à la ligne i :
$\det(A) = \sum_{j \in [\![1,n]\!]} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A, en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemple : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

On voit que la troisième colonne possède 3 zéros, il sera donc plus pratique de développer par rapport à la troisième colonne.

Ainsi, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} +$
$3 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{4+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

D'où : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times \left(\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \right) = 3 \times (-34+12+52)$
$= 90$

6) Proposition
Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes alors $\det(A) = 0$

Démonstration : Il suffit de développer le déterminant selon cette colonne…

7) Proposition
Soit A ∈ $M_n(\varkappa)$, et $\lambda \in \varkappa$, alors det(λA) = λ^ndet(A)

Démonstration : Par récurrence sur n.

8) Déterminant et opérations élémentaires
Soit α ∈ K.
Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Ci ← Ci + αCj
Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux colonnes de A. Ci ↔ Cj
Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α. Ci ← αCi

Mêmes effets pour les opérations élémentaires sur les lignes.

Démonstration : Evidente en traduisant ces opération élémentaires par des multiplications par des matrices de dilatation et de dilatation, voir 11)

Exemple :

Calculer det(A) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Det(A) = $4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $L_{2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$,

et $L_{2 \leftarrow L_3 - L_1}$ et $L_{4 \leftarrow L_4 + L_1}$

Det (A) = $4\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4\times 2\det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 4\times 3\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Det(A) = 8(8-3)+12(-12+4) = 40-96 = -56

9) Proposition
Soit (A,B) ∈ $M_n(\varkappa)^2$, alors det(AB) = det(BA) = det(A)det(B)

Démonstration :
On se contente de la faire dans le cas où n=3, on généralise sans problème.
On pose :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$*, on désigne par* C_1, C_2 *et* C_3 *les colonnes de A.*

AB = ($b_1C_1+b_4C_2+b_7C_3$; $b_2C_1+b_5C_2+b_8C_3$; $b_3C_1+b_6C_2+b_9C_3$)
Det (AB) = ($b_1(b_5b_9-b_6b_8)-b_4(b_2b_9-b_3b_4) + b_7(b_2b_6-b_3b_5)$)det($C_1$, C_2, C_3)
Donc det(AB) = det(B)det(A)=det(A)det(B) = det(BA)

10) Proposition

Soit A $\in M_n(\varkappa)$, A est inversible si et seulement si det(A)$\neq$0

Démonstration

A est inversible s'il existe B telle que AB = I_d

Det(AB) = det(A)det(B) = 1 (il suffit de développer le déterminant de l'identité par rapport à la première colonne)

Donc det(A) $\neq$ 0

Si det(A) $\neq$ 0

On suppose que $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\varkappa)$

On construit la matrice B telle que : $B_{i0,j0} = (-1)^{i0+j0} det(A_{j0,i0})$, ($A_{i0,j0}$ est obtenue à partir de A en supprimant la ligne i0 et la colonne j0).

Soit C = AB

On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{k+j} det(A_{j,k})$

Si i=j, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{k+i} det(A_{i,k}) = det(A)$

Si i$\neq$j, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{k+j} det(A_{j,k})$

Construisons une matrice D égale à la matrice A, mais pour laquelle la k ème colonne est remplacée par la j ème colonne de A, ainsi D a deux colonnes identiques, donc det(D) = 0

Or $det(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,k} (-1)^{i+k} D_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} A_{ij} = 0$

Si i$\neq$j, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$

D'où AB = det(A)I_n

11) Proposition

On a: det(A) = det(^tA)

Démonstration :

Si A n'est pas inversible alors ^tA n'est pas inversible et det(A)=det(^tA)=0

Si A inversible, par Gauss-Jordan, on peut ramener par opérations élémentaires, la matrice A à l'identité (c'est d'ailleurs l'une des méthodes pour calculer l'inverse)

Ces opérations élémentaires se traduisent matriciellement par des multiplications par des matrices de transvection $T_{i,j}$ et des matrices de dilatation $D_i(a)$.

Précisément : $T_{i,j}A$ ajoute la j ème ligne à la i ème ligne (et A $T_{i,j}$ la ième colonne à la j ème). $D_i(a)A$ multiplie la i ème ligne par A (et A $D_i(a)$ la ième colonne par a)

On a : $T_{i,j} = I_n + aE_{ij}$ et donc det($T_{i,j}$)=1 et $D_i(a)$ est la matrice identité où le coefficient i,i est remplacé par a, et donc det($D_i(a)$) = a

On a : A=E_1…E_N où les matrices E_i sont des matrices de transvection ou de dilatation.

Et clairement det(A)=det(^tA)

12) Cofacteur, comatrice

#Soit A $= (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\varkappa)$ et $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$

On rappelle que $A_{i0,j0}$ est obtenue à partir de A en supprimant la ligne i_0 et la colonne j_0.

On appelle **cofacteur** $\boldsymbol{C_{i0,j0} = (-1)^{i0+j0}\det(A_{i0,j0})}$

On définit la **comatrice de A, com(A),** la matrice de terme général $(C_{i,j})$ avec (i, j) $\in [\![1, n]\!]^2$

#Proposition: On a $\,^t$com(A)A = det(A)In

En particulier, si a est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,^t\mathrm{com}(A)$

Démonstration : Il suffit de reprendre le calcul du 9)

Exemple : Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer com(A), et s'il existe, déterminer A^{-1}

II. Déterminant d'un endomorphisme

Soit B et B' deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E
Soit P la matrice de passage de B à B'
Soit f un endomorphisme de E dont la matrice relative à B est A, et la matrice relative à B' est A'
On a: $A = PA'P^{-1}$, or $\det(PA'P^{-1}) = \det(A'P^{-1}P) = \det(A')$, Soit: det(A) = det(A')

1) Définition
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors on définit le déterminant de f comme le déterminant de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de E, et on le note det(f) puisqu'il est indépendant de la base choisie.

2) Propriétés
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E et $\lambda \in K$.
$\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$ et donc $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$.
f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. De plus, $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$.

III. Complément : Déterminant d'une n-forme linéaire alternée

1) Définition
Soit E et F des $\varkappa$-espaces vectoriels, $n \geq 2$
Une application $\varphi : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Une application φ **est dite alternée** si pour tout n-uplet $(a_1,...a_n) \in E^n$
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant : $1 \leq i < j \leq n$ et $a_i = a_j$ alors $\varphi(a_1,...a_n) = 0_F$

Notation : Lorsque F est le corps des scalaires K, on dit que φ est une forme n-linéaire sur E, on note $\Lambda_n(E)$.

2) Antisymétrie
Une application $\varphi : E^n \to K$ n-linéaire et alternée est antisymétrique, c'est-à-dire que pour tout $(u_1,...,u_n) \in E^n$, et pour tous les entiers i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$:
On a $\varphi(u_1,...u_i,...,u_j,...,u_n) = - \varphi(u_1,...u_j,...,u_i,...,u_n)$

Démonstration :
Il suffit de calculer et de développer : $\varphi(u_1,...,u_i+u_j,...,u_j+u_i,...,u_n)$...

3) Théorème (admis)
Soit B une base de E, soit $\varphi : E^n \to K$ une forme n-linéaire alternée alors $\varphi = \varphi(B)\det_B$

Remarque : Cette relation traduit le fait toute forme linéaire est proportionnelle au déterminant.

IV. Déterminant d'une famille de vecteurs

1) définition
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $B=(e_1 ;... ;e_n)$ une base de E.
Pour toute famille $F=(x_1 ;... ;x_n)$ de vecteurs de E, on définit $\det(F) = \det_B(F)$ c'est-à-dire le déterminant de la matrice formée par concaténation des vecteurs $x_1 ;... ;x_n$

Remarque : **Le déterminant d'une famille de vecteurs dépend donc de la base choisie.**

2) Théorème
Soit B une base de l'espace vectoriel E de dimension finie.
On définit l'application $\det_B : E\times ... \times E \to \mathbb{R}$, $(x_1,...,x_n) \to \det_B(x_1,...,x_n)$ est une forme n-linéaire, alternée (et antisymétrique)

Remarque : Pour une n-forme linéaire : antisymétrique$\Leftrightarrow$alternée.

3) Proposition
Une famille $(x_1 ;... ;x_n)$ de E est une base de E si et seulement si $\det_B(x_1 ;... ;x_n) \neq 0$

Démonstration :
Soit $B'=(x_1 ;... ;x_n)$, alors $\det_{B'}$ et $\det_B$ sont deux n formes alternées et sont donc proportionnelles : ainsi $\exists \alpha \in K, \forall (u_1, ..., u_n) \in E^n$, $\det_{B'}(u_1, ..., u_n) = \alpha \det_B(u_1, ..., u_n)$, en particulier pour, $(u_1, ..., u_n) = (x_1, ..., x_n)$
On a $\det_B(x_1, ..., x_n) = \alpha \det_B(x_1, ..., x_n)$ or $\det_{B'}(x_1, ..., x_n) = 1$
Donc $\alpha = \frac{1}{\det_B(x_1,...,x_n)} = \frac{1}{\det_B(B')}$ et $\det_{B'}(u_1, ..., u_n)\ \det_B(B') = \det_B(u_1, ..., u_n)$

Remarque : Si $(u_1, ..., u_n)$ correspond aux vecteurs de B : $\det_{B'}(B)\det_B(B') = 1$
Pour le sens $\Rightarrow$ on a $\det_{B'}(B)\det_B(B') = 1$ donc $\det_B(B') \neq 0$
Pour le sens $\Leftarrow$, on procède par contraposée, en supposant que l'un des vecteurs x_j s'exprime en fonction des autres et on montre que $\det_B(x_1 ;... ;x_n) = 0$