Chapitre 22 : Les séries

I. Généralités

1) Définition

Etant donné une suite (u$_n$)$\in \varkappa^n$, de nombres réels ou complexes, on associe la suite $(\mathrm{Sn})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

La suite $(\mathrm{Sn})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n. On la note simplement $\sum u_n$.

Pour n $\in \mathbb{N}, S_n$ est appelée somme partielle d'indice n de $\sum u_n$

Remarque : il est très facile de retrouver u_n à partir de S_n en effet, $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n\geq 1$

2) Convergence

a) Définition

Soit (u$_n$)$\in \varkappa^n$, la série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles (S_n) l'est.

Dans ce cas, la somme de la série est la limite des sommes partielles.

On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Exemple :

Soit u la suite géométrique de raison 3 et de premier terme u_0=1 alors $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{2} = \infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice :

Montrer que $\sum_{k\geq 3} \frac{1}{2^k}$ converge et déterminer sa somme.

b) Théorème dit de condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Si la suite (u_n) n'est pas convergente de limite nulle alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration : $u_n = S_n - S_{n-1}$, comme S_n converge, S_n et S_{n-1} ont la même limite donc u_n tend vers 0.

Attention, la convergence du terme générale vers 0 ne suffit pas à établir la convergence de la série. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

En effet, si elle convergeait alors S_{2n} et S_n ont la même limite, et $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0$, or $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

c) Théorème comparaison suite-série

Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques telles que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$

Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0$

Démonstration : $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite S_n converge
Or $S_n = a_{n+1} - a_0$
Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

3) Reste d'une série convergente
Soit $\sum u_n$ une série convergente, le reste d'indice n de $\sum u_n$ est définie par
$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$, de plus, la suite (R_n) est convergente de limite nulle.

4) Opérations algébriques sur les séries convergentes.
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, $\lambda \in \varkappa$ et n_0 un entier naturel.

Si $\sum u_n$ converge alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ converge alors Si $\sum \lambda u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Démonstration : Montrons que : Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Supposons que $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors $\sum_{n=1}^{N} u_n + v_n\ converge$
Or $\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} u_n + v_n - \sum_{n=1}^{N} u_n$ et $\sum v_n$ converge…

II. Séries à termes positifs

1) Théorème
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs, on note (S_n) la suite des sommes partielles.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.
Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, sinon la série diverge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

Démonstration : (S_n) est croissante et majorée donc elle converge
Réciproquement si (S_n) converge, comme (S_n) est croissante, alors S_n est majorée par la limite (voir les suites)

2) Comparaison
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $0 \leq u_n \leq v_n$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Démonstration : Il suffit de revenir aux sommes partielles…

Exemple : Comme : 0≤ $\frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, comme la série géométrique de terme général $\frac{1}{2^n}$, converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{1+2^n}$ converge également.

3) Règle dite des équivalents.
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Démonstration :
Si $u_n \sim v_n$ alors *il existe* un rang n_0 à partir duquel, 0≤ $\frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n$, et on revient aux sommes partielles.

Exemple : Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, et que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

4) Règle dite des comparaisons
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs

Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge

Démonstration :
Montrons que : Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge
Si $u_n = O(v_n)$, il existe un rang n_0 et un réel K tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq K v_n$
D'où $\sum_{n=n_0}^{N} u_n \leq K \sum_{n=n_0}^{N} v_n$
Et $\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} u_n \leq K \sum_{n=n_0}^{N} v_n + \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n \leq K \sum_{n=0}^{\infty} v_n + \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$
Donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc elle converge.

5) Comparaison série-intégrale
Soit f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive.
Alors : $\boldsymbol{\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt}$

Ce qui donne en appliquant la relation de Chasles :
$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^{n} f(t)dt$

III. Séries de référence

1) Séries géométriques

Soit z ∈ ℂ, la série géométrique $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Démonstration

Si |z|= q ≥1, alors $\sum z^n$ diverge grossièrement !

Sinon : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $S_n \to \frac{1}{1-q}$

2) Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si α>1

Démonstration :

Si α ≤0, alors la série diverge grossièrement

Si α>1, alors x→ $\frac{1}{x^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur]0,+∞[

Par comparaison série-intégrale : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1+ \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}$dt = 1+$\frac{1}{\alpha-1}$(1-$n^{1-\alpha}$)…

Le cas α ≤1 est laissé au lecteur…

3) Règle de Riemann

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, soit $\alpha \in]0;+\infty[$

Il suffit qu'il existe α>1 tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} k^\alpha u_k = 0$ pour que $\sum u_k$ converge.

Il suffit qu'il existe α ≤1 tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha u_k} = 0$ pour que $\sum u_k$ diverge.

Exercice :

Soit $\sum u_k$ avec $u_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, déterminer la convergence de la série par :

-comparaison avec une série de Riemann

-par application de la règle de Riemann

-Un élève écrit : $\frac{k}{(k+1)(k+2)} \to 0, donc\ \frac{1}{(k+1)(k+2)} = o\left(\frac{1}{k}\right) et\ la\ série\ diverge$. Que peut-on en penser ?

4) Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, on suppose que la suite $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge et on appelle L sa limite.

Alors, si L>1, $\sum u_k$ diverge

Alors, si L<1, $\sum u_k$ converge

Alors, si L =1, on ne peut pas conclure avec le critère de d'Alembert.

Exercice :

Démontrer que pour tout x>0, $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge. Il s'agit de l'exponentielle.