Probabilités sur un univers fini, sur un univers dénombrable

Une expérience aléatoire est un procédé donnant des résultats dépendant du hasard ou pouvant s'y assimiler. L'ensemble des résultats possibles est appelé l'univers et se note Ω.

Dans le secondaire, les probabilités ont été étudié lorsque Ω était un ensemble fini. Nous allons généraliser avec entre autres, Ω dénombrable.

I. Univers fini

1) Univers et événements

a) Définition :

Un univers fini est un ensemble fini non vide, noté en général Ω.
Un élément w∈ Ω est appelé **une éventualité ou une issue.**

b) Définition

Toute partie de Ω est appelée événement
L'ensemble Ω est appelé événement **certain**
L'ensemble vide est appelé événement **impossible**
Un singleton {w} avec w∈ Ω est appelé **événement élémentaire.**

Remarque : L'ensemble des événements est donc P(Ω)

c) Définition

Le complémentaire d'un événement A, noté $\bar{A}$, est appelé **événement contraire de A**.
Deux événements A et B disjoints (c'est-à-dire tels que A∩B=∅) sont dits **incompatibles.**

d) Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements de Ω** toute famille d'événements A_i telle que :
-$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!], avec\ i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
-$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

2) Variable aléatoire (HP)

Une variable aléatoire sur un univers Ω est une application définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E

Remarque : Une variable aléatoire n'est donc ni une variable (car c'est une application) ni aléatoire.
Une variable aléatoire est dite réelle si elle est à valeurs dans ℝ et complexe si elle est à valeurs dans ℂ.

3) Espace probabilisé sur un univers fini

a) Définition

Soit Ω un univers fini.
On appelle probabilité sur Ω toute application P de P(Ω) dans [0,1] vérifiant :
#P(Ω)=1
#Pour tout événements A et B incompatibles, P(A∪B)=P(A)+P(B)

b) Espace probabilisé

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω,P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

c) Théorème

Soit A et B deux événements de (Ω,P) :

P(∅)=0

P($\bar{A}$) = 1-P(A)

Si A⊂B alors P(A)≤P(B)

P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)

d) Additivité finie

Pour toute famille (A_1,…,A_n) d'événements deux à deux incompatibles de (Ω,P), alors : P$(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Exercice : Soit A,B et C trois événements d'un espace probabilisé fini, déterminer P(A∪B∪C)

e) Inégalité de Boole :

Soit (A_1,…,A_n) une famille finie d'événements de (Ω,P), alors : P$(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

f) Proposition

Soit (A_1,…,A_n) un système complet d'événements de (Ω,P), alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$=1

De plus, pour tout événement B : P(B) = $\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$

g) Détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires

-Distribution

Une distribution de probabilités sur un ensemble fini E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.

-Théorème

Soit Ω un univers fini

Si P est une probabilité sur Ω, alors P(w) avec w∈ Ω est une distribution de probabilités sur Ω.

Réciproquement, si p_w avec w∈ Ω est une distribution de probabilités sur Ω, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que P({w})=p_w pour tout w∈ Ω.

Pour tout événement A, P(A) = $\sum_{w \in A} p_w$

h) Théorème :

Sur tout univers fini Ω, il existe une unique probabilité P prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires.

Pour tout w∈ Ω, on a : P({w})=$\frac{1}{card(\Omega)}$

Pour tout événement A, on a $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

4) <u>Loi d'une variable aléatoire</u>

Notation : On utilise à présent l'allègement : P(X=x) à la place de P({X=x})

a) Théorème

Si X est une variable aléatoire sur (Ω, P) alors l'application :
$P(X(\Omega)) \rightarrow [0,1]$, $A \rightarrow P(X \in A)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de X et notée P_X

b) Proposition

La loi d'une variable aléatoire X sur (Ω, P) est déterminée de manière unique par la distribution de probabilités $P(X = x)_{x \in X(\Omega)}$
Plus précisément : $P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$

Notation : On note X~Y la relation $P_X = P_Y$, ce qui équivaut à $X(\Omega)=Y(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega)$, P(X=x)=P(Y=x)

5) Lois usuelles

a) Loi uniforme

Soit E un ensemble fini non vide, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur E, si X est à valeurs dans E et : $\forall x \in E$, $P(X=x) = \frac{1}{card(E)}$

On note X~U(E)

Exemple :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on en prend une au hasard, et l'on note X le numéro de la boule tirée. Alors X X~U($[\![1, n]\!]$)

b) Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$, on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeurs dans {0,1} et P(X=1)=p

On note X~B(p)
Exemple :
Toute épreuve à deux issues peut être représenté par une loi de Bernoulli, à conditions de noter 0 et 1 les deux issues possibles.

c) Loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$, et n un entier non nul, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) si X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$,
$P(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note X~B(n,p)

Exemple :

On lance n fois une pièce équilibrée et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de piles obtenu. La variable X suit la loi binomiale de paramètres $(n,\frac{1}{2})$

d) Loi géométrique
Définition
Soit $p\in]0,1[$, la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque : $P(X=0)=0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Notation : $X\hookrightarrow G(p)$

Théorème
Si $X\hookrightarrow G(p)$ alors : Son espérance est $E(X) = \frac{1}{p}$, Sa variance est : $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

e) Loi de Poisson
Définition
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

Notation : $X\hookrightarrow P(\lambda)$

Théorème
Si $X\hookrightarrow P(\lambda)$ alors : Son espérance est : λ *et* Sa variance est : λ

II. <u>Univers dénombrable</u>

1) Tribu

a) Définition
On appelle **tribu sur Ω**, une partie τ de P(Ω) (parties de Ω) telle que :
- $\Omega \in \tau$
-si $A\in \tau$, alors ${}^cA = \Omega\backslash A \in \tau$
-pour toute suite $A_n\in \tau$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \tau$

b) Propriétés
Soit τ une tribu alors : $\emptyset \in \tau$, une intersection finie ou dénombrable d'éléments de τ est dans τ.

Démonstration :
Il suffit de reprendre l'axiomatique des tribus.

Exemples:
Pour toute partie A de Ω: $\{ \Omega, A, {}^cA, \emptyset\}$ est une tribu

L'ensemble des parties de Ω, noté P(Ω) est une tribu sur Ω, appelée tribu discrète.

c) Définition
Un couple **(Ω, τ) avec τ une tribu sur Ω s'appelle espace probabilisable.**

2) Probabilité
Une probabilité sur (Ω, τ) est une application sur Ω, à valeurs positives, qui vérifie :
$P(\Omega) = 1$
Pour toute suite $A_n \in \tau$, d'événements deux à deux incompatibles, alors
$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Le triplet : **(Ω, τ, P) s'appelle espace probabilisé.**

3) Propriétés des probabilités
Soit P une probabilité sur (Ω, τ) alors :
$P(\emptyset)=0$
$P({}^cA) = 1-P(A)$
P est à valeurs dans [0,1]
Pour toute famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i\in I}$, la famille $P((A_i))_{i\in I}$ vérifie : $P(\coprod_{i\in I} A_i)=\sum_{i\in I} P(A_i)$
Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$
$P(B\backslash A) = P(B)-P(A)$
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Démonstrations:
Soit la suite d'événements $A_n=\emptyset$, alors les événements sont deux à deux incompatibles, donc $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$, or si la série de terme constant $P(A_n)$ converge alors c'est que $P(A_n) = 0$ donc $P(\emptyset)=0$

On a : $P({}^cA\cup A)=P(\Omega)=1$ or ${}^cA$ et A incompatibles donc $P({}^cA\cup A)= P({}^cA) + P(A)=1$

Par définition P est à valeurs positives, de plus $P({}^cA) = 1-P(A)\geq 0$ donc $P(A)\leq 1$

Si $A\subset B$ alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B\backslash A$ donc $P(B)=P(A)+P(B\backslash A)$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B\backslash A)$ et $P(B)=P(A\cap B)+ P(B\backslash A)$ d'où $P(B\backslash A)= P(B)-P(A\cap B)$

4) Théorème de continuité croissante
Si (A_n) est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors
$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$

De même, si (A_n) est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Démonstration :
On pose $A_{-1}=\emptyset$ et $B_n=A_n\backslash A_{n-1}$
On montre que $A_n=\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$
De plus, les événements B_n sont incompatibles, donc
$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)=P(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)=\sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(B_k)$ or $\sum_{k=0}^{n} P(B_k)= P(A_n)$

5) Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Remarque : Si A et B sont indépendants, il en va de même de ${}^{c}A$ avec B, etc.

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements, on dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour tout partie finie J de I, on a : $P(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{\in J} P(A_i)$

6) Probabilité conditionnelle.
Soient A et B deux événements avec $P(B)>0$, le réel $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ s'appelle la **probabilité de A sachant que B a été réalisé.**

Inversion des conditionnements :
Soient A et B deux événements tels que $P(A)>0$ et $P(B)>0$ alors, $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

7) Formule des probabilités composées
Soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille d'événements tels que $P(A_1\cap_{\dots}\cap A_n)\neq 0$
Alors : $P(A_1\cap_{\dots}\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\times \dots \times P(A_n)P(A_n \mid A_1\cap_{\dots}\cap A_{n-1})$

Une suite $(A_n)_{n\in I}$ d'événements s'appelle un système complet d'événements lorsque si $n\neq p$, $A_n\cap A_p = \emptyset$, $\forall n \in I, A_n \neq \emptyset$ et si la réunion des A_n est égale à Ω.

Démonstration :
Par récurrence sur n.

8) Formule des probabilités totales :
Soit $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements alors pour tout événement B, on a : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$

Démonstration :
$B= (A_1\cap B) \cup_{\dots}\cup (A_n\cap B)$ or les événements étant incompatibles…

9) Formule de Bayes
Soit I un ensemble fini d'indices ou dénombrable, $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements avec pour tout n, $P(A_n)>0$
Alors : $P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P(B|A_i)}$

Démonstration :
Il suffit de vérifier que $P(A_k|B) \sum_{i\in I} P(A_i)P(B|A_i) = P(A_k)P(B|A_k)$

III. <u>Espérance, variance</u>

1) Espérance d'une variable aléatoire discrète
   a) Définition
   La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $\{x_n, n \in I\}$ est dite d'espérance finie lorsque la famille $(x_n P(X = x_n)\,_{n\in I}$ est sommable, si tel est le cas, on appelle espérance de X le réel : $E(X) = \sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$

Remarque : On dit que la variable X est centrée si E(X)=0

Exemple :
-Justifier que $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$ correspond à une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$
-Admet-elle une espérance finie ?

b) Théorème
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

Démonstration :
Utiliser le fait que $P(X = n)= P(X \geq n)- P(X \geq n+1)$

c) Théorème du transfert (théorème admis)
Si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur X(Ω) de X, alors f(X) est d'espérance finie si et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)\mathrm{f}(x_n)$ converge absolument.

Dans ce cas : $\mathbf{E(f(X))} = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{P(X = x_n)}\mathbf{f}(\boldsymbol{x_n})$

d) Théorème
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.
On a : $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{E(\alpha X + Y) = \alpha E(X) + E(Y)}$. Si X≥0, alors E(X) ≥0

Démonstration :
On applique la formule de transfert à X et à f :x→ αx
On applique la formule de transfert à (X,Y) et à f :x→ $x + y$

$E(X) = \sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$ donc si X≥0, alors E(X) ≥0

e) Théorème
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors E(XY)=E(X)E(Y)

Démonstration
Comme X et Y sont indépendantes : P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)
D'après le théorème de transfert XY est d'espérance finie si et seulement si xy P(X=x)P(Y=y) est sommable.
Or xP(X=x) et yP(Y=y) sont sommables et $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathrm{xy}\ \mathrm{P(X = x)P(Y = y)} = (\sum_{x\in X(\Omega)} \mathrm{xP(X = x)})(\sum_{yY(\Omega)} \mathrm{yP(Y = y)})$

2) Variance
a) Théorème de Koenig-Huyghens
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Si X^2 est d'espérance finie, alors : $V(X) = E(X^2)$-$E(X)^2$

L'écart-type de X est noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Démonstration :
De façon générale, si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors XY est également d'espérance finie.
En effet : $(|X|-|Y|)^2 \geq 0$ d'où : $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$
Ainsi pour Y=1, on a : $|X| \leq \frac{1}{2}(X^2 + 1)$

b) Théorème
On a : $\forall(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{aX} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})$

Démonstration:
On a : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2 = E(a^2X^2+2abX+b^2) - (aE(X)+b)^2 = a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-a^2E(X)^2-2abE(X)-b^2 = a^2V(X)$

Remarque : Une variable aléatoire admettant une variance est centrée réduite lorsque E(X) = 0 et V(X) = 1
Par exemple : Si $V(X) \neq 0$, $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.