Feuille d'exercices sur intégrales généralisées

Exercice n°0

Résumer sur un schéma les liens entre « fonction intégrable » et « intégrales convergentes »

Quelle est la grande méthode à employer pour démontrer la convergence d'une intégrale pour une fonction non intégrable ?

Exercice n°1

Soit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$ où a désigne un réel strictement positif.

1) Montrer que I est une intégrale convergente.
2) A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$, trouver une relation vérifiée par I, et déterminer I.

Exercice n°2

1) A l'aide d'un changement de variable, montrer que les intégrales généralisées $a=\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $b=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ sont de même nature.
2) Etablir la convergence de l'une d'entre-elles, établir une relation entre a et b
3) Montrer que $a=\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$

Exercice n°3

1) Montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente.
2) Montrer que pour tout réel positif t, $|\sin(t)| \geq sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$
3) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.
4) Montrer que I n'est pas absolument convergente.
5) La fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$?

Exercice n°4

Les 2 questions sont indépendantes :

1) Montrer que la fonction $f(x) = (2i - \frac{1}{x^2})e^{ix^2}$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$.

   Montrer que $\int_\pi^\infty (2\mathrm{i} - \frac{1}{x^2})e^{ix^2}$ dx est convergente.
2) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$
   a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
   b) A l'aide du changement de variable $[t=u^{\frac{1}{n}}]$, déterminer un équivalent de I_n, (on l'exprimera sous forme intégrale)

Exercice n°5

Montrer que l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(lnt)^2} dt$ est convergente et préciser sa valeur.

Exercice n°6

Soit $f(x) = \ln(\sin(x))$ et $g(x) = \ln(\cos(x))$

a) Montrer que f et g sont intégrables sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

b) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g$, en considérant I+J, calculer I et J.

Exercice n°7

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2 + t)\, dt$ converge

Exercice n°8

On considère les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $I_2 = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $I_3 = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$

1) Justifier l'existence de I_1, I_2 et I_3
2) Calculer I_1 et I_2
3) Calculer I_3 à l'aide de la fonction $u \to \sin(u)$

Exercice n°9 (oraux de concours)

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice n°10 (oraux de concours)

1. Calculer
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$
   A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$
2. Montrer avec les règles de Riemann que
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$
   Converge.
3. Calculer
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

Exercice n°11 (oral Ecricome)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à $\dfrac{1}{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M \geqslant 1$,
$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1) x^n e^{-x} \mathrm{d}x.$$
3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+1} = \dfrac{1}{e} + (n+1) I_n$.
5. Calculer I_n pour $n \in \{1,2,3\}$.

Exercice n°12 (oraux de concours)

Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\, dx$.

Exercice n°13 (écrits concours)

Étude de la fonction Γ

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

2. ***a)*** Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t}$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$, pour tout réel x.

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt$ est convergente.

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

3. ***a)*** Calculer $\Gamma(1)$.

b) Etablir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer : $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

En déduire : $\displaystyle\forall p \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\sqrt{\pi}$.