Feuille d'exercices sur calcul différentiel

Exercice n°1

1) Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$:
   a) $\mathbb{R}^2$ $\quad$ $b)$ $]0,1[^2$ $\quad$ c) $\mathbb{R}^2 \setminus\{(0,0)\}$
2) a) Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, et soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, montrer que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   b) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 , y > \cos(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Exercice n°2

Les deux questions sont indépendantes :

1) Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2) Soit : U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, montrer que U∩V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Exercice n°3

Pour chaque sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, préciser s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, ou d'un fermé borné. Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}^2$
2. $B = [0,1] \times [0,1]$
3. $C = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
4. $D =]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x + y \geqslant 1\}$
6. $F = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
7. $G =]0,1[\times]0,1[$
8. $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
9. $I = \mathbb{R} - \{-1;1\} \times \mathbb{R}_+^*$
10. $J = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Exercice n°4

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

Soit f : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, (x,y) $\rightarrow \frac{x}{y}$, g : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow e^{-x}\sin(x^2 + y^2)$

Exercice n°5

Soit N : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow$N(x,y)=$\sqrt{x^2 + y^2}$ n'admet pas de dérivées partielles en (0,0) mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus\{(0,0)\}$ est de classe C^1. Préciser ses dérivées partielles.

Exercice n°6

Soit f∈ $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, montrer que la fonction : $\theta: t \rightarrow f(t^2, t^3)$ est de classe C^1, et calculer sa dérivée.

Exercice n°7

Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x,y) $\rightarrow \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x, y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f admet des dérivées selon tout vecteur en (0,0)
2) Montrer que la fonction f n'est pas continue en (0,0)

Exercice n°8

Soit f$\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ si et seulement si on peut trouver une fonction h $\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, f(x,y)=h(x)

Exercice n°9 (oraux MP CCINP 2022)

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Prouver : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy\geqslant\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.
2. a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose : $\alpha=0$.
   a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
   b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice n°10

Soit f$\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, montrer que f vérifie : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ si et seulement si on peut trouver une fonction h $\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, f(x,y)=h($\frac{2x-y}{3}$)

Ind : On posera x=u+v et y=u-2v et on pourra utiliser la fonction g : (u,v) →f(u+v,u-2v)

Exercice n°11

Montrer l'existence en (0,0) des fonctions suivantes :

a) $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$
b) $\frac{x^5y^3}{x^6+y^4}$ (Ind. On posera X=x^3 et Y=y^2, puis on passera en coordonnées polaires)

Exercice n°12

Soit f : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, (x,y) → $\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f
2) Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles

Exercice n°13 Soit f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, (x,y) → $\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$
2) Montrer que f admet des dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

3) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Exercice n°14 (d'après CCP)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer :

$$\partial_1(f)(x,y),\ \partial_2(f)(x,y),\ \partial_1^2(f)(x,y),\ \partial_{12}^2(f)(x,y) \ \text{ et } \ \partial_2^2(f)(x,y)$$

2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$.
En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.

4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.

Exercice n°15

Soit la fonction f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x,y) $\to x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$

1) Montrer que f$\in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
2) Déterminer les points critiques de f
3) Montrer que f admet un minimum local
4) Ce minimum est-il global ?
5) Peut-on dire que f admette un maximum global ?

Exercice n°16

Soit la fonction f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x,y) $\to x^2 y + \ln(1+y^2)$

1) Montrer que f$\in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
2) Déterminer les points critiques de f
3) En étudiant les signes de f(x,$-x^3$) et f(0,y), montrer que f n'a pas de minimum local en (0,0)
4) En étudiant la limite en $+\infty$ de f(0,y), que peut-on conclure ?
5) En étudiant la limite en $-\infty$ de f(1,y), que peut-on conclure ?

Exercice n°17

Soit f: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$, (x,y) $\to \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$. Montrer que f admet un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Exercice n°18

Donner les extrema globaux et locaux de : f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x,y) $\to -2x^3+3x^2+y^2$

Exercice n°19

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 telle que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f(x,y)=f(y,x), quelle relation a-t-on entre les dérivées partielles de f ?

Exercice n°20

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 telle que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(x,y) + $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$(x,y) $= 0$

On pose g(r,t) = f(rcos(t),rsin(t))

1) Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ en fonction des dérivées partielles de f
2) Même question avec $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$
3) Déterminer une relation entre $\frac{\partial}{\partial r}$(r$\frac{\partial g}{\partial r}$) et $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

Exercice n°21

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) si\ x \neq 0$ et f(0,y)=0

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$
2) Est-ce que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3) Est-ce que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (0,0) et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (0,0)

Exercice n°22

On s'intéresse aux fonctions f définies de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, 2$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$-$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

1) Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, on pose u=x+y, v=x+2y
   On définit enfin la fonction g par : g(u,v) = g(x+y,x+2y) = f(x,y)
   Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}^2$
2) Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de u, de v et des dérivées partielles de g.
3) En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont aux conditions de l'énoncé.

Exercice n°23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par f(x,y) = $xe^{x(y^2+1)}$

1) Justifier que f soit C^1 sur $\mathbb{R}^2$
2) Déterminer les dérivées partielles de f.
3) En déduire que le seul point critique de f est A(-1,0)
4) Montrer que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f(x,y)$\geq xe^x$
5) En étudiant la fonction g définie par g(x) = xe^x, conclure que le point A correspond à un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$