Feuille d'exercices sur séries

Exercice n°1

1) En utilisant la comparaison avec une intégrale, démontrer que la série harmonique diverge.
2) Toujours avec la même méthode, prouver l'existence d'un réel γ tel que :
   $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (*Au fait comment s'appelle ce réel γ ?*)
3) Montrer que la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice n°2 : Etudier la convergence de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)_{n>0}$

Exercice n°3

Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
2) a) Soit $0<\alpha<1$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
   b) Déterminer un équivalent du reste d'indice n de la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha>1$

Exercice n°4 (oraux de concours) Les deux questions sont indépendantes…

1)

Après en avoir justifié l'existence, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ sachant } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2)

Soit $\alpha > 0$. Préciser la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice n°5

Pour chacune des séries, justifier l'existence et effectuer le calcul de la somme :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice n°6 : Les trois questions suivantes sont indépendantes :

1) On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$. Justifier la convergence de cette série, on appelle S sa somme, S_n sa somme partielle, déterminer n pour que $|S - S_n| \leq 10^{-2}$
2) Déterminer la nature de la série de terme général : $\cos(n^2\pi\ln(1-\frac{1}{n}))$
   Ind. Faire un DL à l'ordre 4 en 0 de ln(1-x)
3) a) Préciser la nature de la série de terme général $u_n = \ln(n)+a\times\ln(n+1)+b\times\ln(n+2)$ en fonction des réels a et b.
   b) Calculer alors sa somme.

Exercice n°7 : Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$

Exercice n°8 : Déterminer la nature de la série de terme général : $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$

Exercice n°9 (oraux de concours)

EXERCICE 46 analyse

On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice n°10 (oraux de concours)

EXERCICE 6 analyse

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice n°11 (concours)

Soit $\alpha \in]0, \pi]$.
On souhaite démontrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

a. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
Calculer I_0, et $I_n + I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

c. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. On pose, pour $t \in [\alpha, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{it}-1} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

a. Montrer : $S_n(t) = \varphi(t)\left(e^{i(n+1)t} - e^{it}\right)$.
Exprimer $\varphi(t)\,e^{it}$ en fonction de $\frac{e^{it/2}}{\sin(t/2)}$.

b. Montrer : $\int_\alpha^\pi \varphi(t)\,e^{i(n+1)t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(indication : on pourra utiliser une intégration par parties)

c. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} = -\ln(2) + i\int_\alpha^\pi \varphi(t)\,e^{it}\,dt$$

d. En déduire la convergence et la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.

Exercice n°12

En utilisant la comparaison série-intégrale, donner la nature de la série $\sum \frac{1}{n(lnn)^\alpha}$

Exercice n°13

Soit p un réel strictement compris entre -1 et 1, en considérant le produit de Cauchy de $\sum p^n$ par elle-même, montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n = \frac{1}{(1-p)^2}$

Exercice n°14 (oraux de concours)

On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, et qu'elle ne converge pas absolument.

2. Soit $\sum w_n$ le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec elle-même.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

b. Justifier :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ 0 < k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

En déduire que le produit de Cauchy $\sum w_n$ diverge grossièrement.

3. Ce résultat est-il en contradiction avec le théorème de convergence des produits de Cauchy ?

Exercice n°15 : On souhaite former un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

1) Justifier que : $u_n \sim \frac{1}{n}$
2) Montrer que $\frac{1}{n}$ est le reste de la série convergente $\sum\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$
3) Soit $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$, *montrer que* $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}$,
4) Montrer par comparaison avec une intégrale que : $d_n \sim \frac{-1}{2n^2}$
5) Conclure.

Exercice n°16

1) Justifier que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
2) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
   a) Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$
   b) Déterminer un équivalent de R_n (ind. On évaluera R_n - R_{n+1} ...)
   c) Donner la nature de $\sum_{n\geq 1} R_n$

Exercice n°17 Autour de D'Alembert ?

Les deux questions sont indépendantes

1) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$
2) Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente, établir que $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}$ est une série convergente. (ind. On posera $S_n = \sum_{n\geq 1} z_n$ et remarquer que $z_n = S_n - S_{n-1}$)

Exercice n°18 (oraux de concours)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \,]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \,]0,1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

5. En déduire la nature de $\sum u_n$.