Feuilles d'exercices sur les suites de fonctions

Exercice n°0

1) Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   a) Si les (f_n) sont croissantes, alors f aussi
   b) Si les (f_n) sont périodiques de période T, alors f aussi
   c) Si les (f_n) sont continues en a$\in I$, alors f aussi
2) Reprendre l'exercice avec convergence uniforme à la place de convergence simple

Exercice n°1

Etudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) pour tout entier naturel n :

1) $\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$
2) $\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ (Aborder la convergence uniforme de 2 façons)

Exercice n°2

1) Une fonction continue sur un segment peut-elle être approchée uniformément sur ce segment par des fonctions polynomiales ? (Penser au théorème de Weierstrass)
2) Soient a et b réels non nuls tels que a<b et f une fonction continue de [a ;b] sur ℝ.On suppose que : $\forall n \in N, \int_a^b f(t)t^n dt$ =0. Montrer que f est nulle.

Exercice n°3

Soit P_n une suite de polynômes de ℝ[X] convergeant uniformément sur ℝ vers f.

Montrer que f est polynomiale.

Exercice n°4

Soit f_n la suite de fonctions définies sur [0,1] par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$

1) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions
2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$
3) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
4) La suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur [0,1] ?

Exercice n°5

Pour tout x réel, pour tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$

1) Etudier la convergence simple des (f_n)
2) Soit a>0, étudier la convergence uniforme des (f_n) sur [a,+∞[
3) A-t-on convergence uniforme sur]0, +∞[?

__Exercice n°6 (oraux concours)__

EXERCICE 10 analyse

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

__Exercice n°7__

Pour n$\in \mathbb{N}^*$, on définit : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, montrer que $f_n(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une fonction qui n'est pourtant pas C^1 sur $\mathbb{R}$

__Exercice n°8 (oraux concours)__

EXERCICE 9 analyse

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

__Exercice n°9 (oraux concours)__

Soit n un entier naturel non nul, on définit les fonctions f_n sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} n^2x \ si \ x \in [0,\frac{1}{n}[\\ \frac{1}{x} \ \ si \ x \in [\frac{1}{n},\infty[\end{cases}$

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n)

__Exercice n°10__

Soit n un entier naturel non nul, on définit les fonctions f_n sur $\mathbb{R}$, par $f_n(x) = \sin(x+\frac{1}{n})$

Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$

__Exercice n°11__

Pour n entier, on pose $I_n=\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
2) A l'aide du changement de variable $t=u^{\frac{1}{n}}$, déterminer la limite de I_n

__Exercice n°12__

Donner un équivalent de $I_n=\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}$ sans la calculer et à l'aide du changement de variable $u=\frac{t}{\sqrt{n}}$

Exercice n°13

On définit la suite de fonctions (f_n) pour tout entier naturel non nul n, sur ℝ par $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$

1) La suite converge-t-elle simplement sur ℝ, si oui, vers quelle fonction ?
2) La convergence est-elle uniforme sur ℝ ?

Exercice n°14

On définit une suite de fonctions (f_n) sur [0,1] par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur [0,1] vers une fonction f dérivable
2) Montrer que (f'_n) converge simplement sur [0,1] vers une fonction g
3) Vérifier que f '≠ g, quelle conclusion en tirer ?

Exercice n°15

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur [0,1] telles que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est finalement uniforme.

Exercice n°16

Démontrer que la limite uniforme de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

Exercice n°17

A l'aide du théorème de convergence dominée, déterminer la limite lorsque n tend vers +∞ des suites suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tant)^n dt$
2) $\int_1^{\infty}\frac{1}{1+t^n}dt$
3) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}dx$

Exercice n°18

Pour x≥ 0 et n≥1, on pose $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$

1) Démontrer que pour x≥ 0, $f_n(x)$ converge simplement vers e^x
2) Démontrer que : $|f_n(x)| \leq e^x$
3) En déduire pour b>1, la limite de $\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-bx}dx$