Feuille d'exercices sur espace euclidien

Exercice n°0

Démontrer que toute famille orthogonale finie de vecteurs **non nuls** de E est libre

Exercice n°1

Soit n un entier naturel non nul, montrer que $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice n°2

Montrer que $\phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)dt$ définit un produit scalaire sur $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$

Exercice n°3

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Pour f, g ∈ E, on pose $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E

Exercice n°4 (oraux CCINP)

- On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par :

$$\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$$

où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ est la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.

- On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice n°5

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice n°6

On considère $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Pour f strictement positive sur [a, b] on pose $L(f) = \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt$. Montrer que $L(f) \geq (b - a)^2$. Etudier les cas d'égalités.

Exercice n°7 (oraux concours)

Soient n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension n.
On suppose qu'il existe q vecteurs unitaires $u_1, \dots, u_q$ de E tels que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{q} \langle x, u_i \rangle^2$$

Montrer que $(u_1, \dots, u_q)$ est une base orthonormale de E.

Exercice n°8

Soit x, y ∈ E. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$

Exercice n°9

On définit une application $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ par $\phi(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})d\theta$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Montrer que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice n°10

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant $\forall x, y \in E$, $x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$ vérifiant $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$

Exercice n°11

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) où u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (−1, 1, 0).

Exercice n°12

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in L(E)$ tel que $\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

1) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ est symétrique.
2) Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice n°13 **(ce type d'exercices correspond davantage au chapitre endomorphismes des espaces euclidiens)**

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée B = (i, j, k). Former la matrice dans B de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$

Exercice n°14 **(oraux CCINP)**

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice n°15

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3) Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4) Calculer d(u, F) où u = (1, 2, 3, 4)

Exercice n°16

Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E sur un sev F. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

(Ind. Pour l'une des implications, poser, x=u+λv, avec u∈Ker(p) et v∈Im(p))

Exercice n°17

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée B = (i, j, k).

Soit p ∈ L(E) déterminé par $\mathrm{Mat}_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice n°18

Soient n un entier supérieur à 3 et E = $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que $\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
2) Calculer $inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1}(t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$

Exercice n°19 (oraux concours)

Énoncé exercice 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice n°20 (oraux concours)

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\ (f, g) \in E^2,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice n°21

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par : F={(x,y,z,t)∈ $\mathbb{R}^4$: x-y+2z+t=0 et -x+2y+3z-t=0} et G=vect((1,1,1,0) ; (2,1,1,-1)).

1) Déterminer une base de $F^\perp$
2) Déterminer une base de $G^\perp$

Exercice n°22

Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension n-1. On note G l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$

1) Soit $a \neq 0_E$, démontrer que $H_a=\{x \in E, (a,x)=0\}$ est un hyperplan de E.
2) Soit H un hyperplan de E, démontrer qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0_E$, tel que $H = H_a$
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a,b \neq 0_E$, pour que $H_a = H_b$
4) Pour $a \in E$, on note $\varphi_a(x) = (a,x)$ de sorte que $\varphi_a \in G$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_a = \varphi_b$
5) En déduire que l'application de E dans G définie par : $a \rightarrow \varphi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice n°23

On considère $E=C([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$

Soit $F=\{f \in E, f(0) = 0\}$

1) Montrer que $F^{\perp}=\{0\}$
2) En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice n°24

Exercice : Démonstration de l'inégalité de Bessel dans un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension finie ou infinie, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. On considère un vecteur $x \in E$.

1. Montrer que, pour tout entier N, on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans E et $\| \cdot \|$ la norme associée.

2. En déduire l'inégalité de Bessel généralisée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

si la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie.

Voici un exercice proposé par ChatGpt

1) Critiquer l'exercice
2) Le résoudre !

Exercice n°25

Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux.

Démontrer que : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$