Feuille d'exercices : Calcul différentiel (2)

<u>Exercice n°1</u> (oraux de concours)

On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = x^2 + x^2 y + y^3$.

1. Montrer que f admet un point critique, mais que ce n'est pas un extremum.
2. Montrer que f possède sur le disque fermé unité un maximum et un minimum,

<u>Exercice n°2</u>

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \; si \; (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

1) Pour tout (u,v) $\epsilon \mathbb{R}^2$, montrer l'existence et calculer $D_{(u,v)} f(0,0)$
2) Pour tϵ $\mathbb{R}^*$, calculer f(t,t^2)
3) La fonction f est-elle continue ?

<u>Exercice n°3</u>

Soit f : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, (x,y) $\rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, montrer que f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

<u>Exercice n°4</u>

Soit f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (u,v) →f(u,v) une fonction de classe C^1

On pose g(x,y) = f(x+y,xy)

Calculer en tout point (x,y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

<u>Exercice n°5</u> (oraux de concours)

Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 \, dt$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

<u>Exercice n°6</u> (oraux de concours)

a) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \operatorname{tr}(M^3)$.
Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Exercice n°7</u>

La fonction f : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x,y) → $+x^2 + y^3 - xy$ possède-t-elle un extremum en (0,0) ?

<u>Exercice n°8</u>

Soit (S) la surface d'équation cartésienne z=$\frac{2xy}{x^2+y^2}$

Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point A(1,$\sqrt{3}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Exercice n°9

On définit sur $\mathbb{R}^2 \setminus\{(0,0)\}$, les fonctions : P(x,y) = - $\frac{y}{x^2+y^2}$ et Q(x,y) = $\frac{x}{x^2+y^2}$

1) Vérifier que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
2) On suppose qu'il existe une fonction f : $\mathbb{R}^2 \setminus\{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :
   $\forall (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 \setminus\{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$(x,y) = P(x,y) et $\frac{\partial f}{\partial y}$(x,y) = Q(x,y)
   Calculer de deux façons différentes $\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(f(\cos(t), \sin(t))dt$ et aboutir à une contradiction.

Exercice n°10 :

Soit φ : M→ M^{-1} sur $GL_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2) Montrer que φ est C^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$
3) a) Soit t ∈ ℝ, montrer que $(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$
   b) En déduire que : d$\varphi(I_n)(E_{ij})$= - E_{ij}
   c) En déduire que : d$\varphi(I_n)$(A)=-A
4) Déterminer la différentielle de φ en M∈ $GL_n(\mathbb{R})$

Exercice n°11

On pose U={(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2, x < y$} et f :U→ $\mathbb{R}^2$, (x,y) →(x^2-y^2-2xy,y)

1) Montrer que U est un ouvert.
2) Montrer que f est injective
3) Soit V=f(U), préciser V et montrer que V est un ouvert.
4) Montrer que f est bijective de U sur V
5) Montrer que f est C^1 sur U et que sa bijection réciproque g est C^1 sur V.
6) Donner la différentielle de g au point (u,v) de V

Exercice n°12

Soit U={(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2, x < y$}, déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que : $\forall (x,y) \in U, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2$, en utilisant le changement de variables u=x+y et v=xy

Exercice n°13

Soit α un réel, et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans ℝ de classe C^2 solutions de :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha$, en utilisant le changement de variables u=2x+y et v=2x-y

Exercice n°14

On note $\Omega = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, déterminer toutes les fonctions f : $\Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, avec le changement de variables $x=ue^{v}$ et $y=e^{-v}$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

Exercice n°15

Soit $U=\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u-v>0\}$ et $\varphi: U \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \to (u^2+v^2, u+v)$

Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert U sur un ouvert V à préciser.

Exercice n°16

Soit $\varphi: (\mathbb{R}^{*+})^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (u,v,w)$ avec $(u,v,w) = (x+z^2, y+x^2, z+y^2)$

1) Montrer que φ *est un* C^2 *− difféomorphisme de* $(\mathbb{R}^{*+})^3$ sur $\mathrm{Im}(\varphi)$, préciser $\mathrm{Im}(\varphi)$
2) On note x, y, z les composantes de φ^{-1}
   a) Calculer $\frac{\partial x}{\partial u}$
   b) Calculer $\frac{\partial x}{\partial v}$

Exercice n°17 (oraux de concours)

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2,3,7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant?
3. Donner la réponse correcte.

Exercice n°18 (oraux de concours)

Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x,y)$ en fonction de x, y et a.
2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles.
   Calculer $F_a(x_0, y_0)$.
4. Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :
   $$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$$
   et préciser son signe.
5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$.
   Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.
6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°19 (oraux concours)

Calculer

$$\iint_{\Delta} (x^3 - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = au\cos\theta$ et $y = bu\sin\theta$.

Exercice n°20

Soit f : U→V une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^q$

On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g, différentiable au point b=f(a).

Démontrer que p=q

Exercice n°21

Soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que : $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, f($\lambda x$)= λ f(x)

1) Démontrer que f(0)=0
2) Démontrer que f est linéaire

Exercice n°22

Soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S.

Démontrer l'existence de $x_0 \in B, tel\ que\ df_{x_0} = 0$

Exercice n°23

Soit D={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0$}

1) Montrer que D est un disque
2) Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$

Exercice n°24

Justifier que la fonction f : $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par f(z) $= \frac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice n°25

Soit E un espace vectoriel euclidien

1) En quels points l'application x→ $\|x\|_2$ est-elle différentiable ?
2) Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice n°26

Montrer que l'application P→ $\int_0^1 P(t)^2dt$ définie sur E=$\mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice n°27

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme autoadjoint de E

1) Montrer que : $x \to (u(x),x)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
2) Montrer que $F : x \to \frac{(u(x),x)}{(x,x)}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$

Exercice n°28

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, croissante vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=0$

On pose $F(x)=f(\|x\|)\, x$

1) Montrer que $N : x \to \|x\|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle
2) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle
3) Montrer que $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(dF(x)(h), h) \geq f(\|x\|)\|h\|^2$
4) a) Montrer que F est injective (on montrera que $t \to tf(t)$ est croissante)
   b) Montrer que F est surjective (on appliquera le TVI à $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+, t \to \|F(ty)\|$)

Exercice n°29

Soit $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; tels \; que : x < y < 2x \; et \; x < y^2 < 2x \}$

Calculer : $\iint_D \frac{y}{x} dxdy$ à l'aide du changement de variables $u=\frac{x}{y}$ et $v=\frac{y^2}{x}$

Exercice n°30

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$

1) Démontrer que f définit une application surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2) Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, calculer la matrice jacobienne de f en (x_0,y_0)
3) Est-ce que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Exercice n°31

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$

Démontrer Imf est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$