**Feuille d'exercices sur probabilités**

## Exercice n°1 (autocorrection)

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$. L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note alors sa couleur, et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans $U_1$, sinon dans $U_2$

Soit $B_n$ l'événement : « La boule tirée au nième tirage est blanche », on pose $p_n=P(B_n)$

1) Calculer $p_1$
2) Démontrer que n entier, $p_{n+1}=\frac{-6}{35}\,p_n+\frac{4}{7}$
3) En déduire la valeur de $p_n$

*On a $p_1 = 17/35$, à l'aide d'un arbre, on obtient : $p_{n+1}=2/5p_n + 4/7(1-p_n)$*

*On pose $f(x)=-6/35x+4/7$, on cherche le point fixe : $f(x)=x$ a pour solution $x=20/41$*

*On pose la suite $u_n = p_n - 20/41$, et $u_{n+1} = -6/35u_n$,*

*On obtient : $u_n=(-3/1435)*(-6/35)^{n-1}$, $p_n=20/41-(3/1435)\,)*(-6/35)^{n-1}$*

## Exercice n°2 (autocorrection)

Une forêt se compose de trois types d'arbre, 30% de chênes, 50% de peupliers et 20% de hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers et 25% des hêtres.

Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne, un peuplier, un hêtre ?

*Calculons par exemple $P(Chêne/Malade)=P(C\cap M)/P(M)$*

*Or $P(M)=0.3*0.1+0.05*0.04+0.2*0.25$. Et $P(C\cap M)=0.3*0.1$, D'où : $P(Chêne/Malade)=0.037$*

## Exercice n°3 (autocorrection)

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. On note $p_n$ la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1) Calculer $p_1$
2) Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$
3) En déduire l'expression de $p_n$

*On obtient $p_1=2/5$ et $p_{n+1}=2/5p_n +3/5(1-p_n) = -1/5p_n + 3/5$*

*On résout $f(x)=x$ avec $f(x)=-1/5x+3/5$ soit $x=1/2$*

*On pose $u_n = p_n-1/2$, on a $u_{n+1} = -1/5u_n$, et $u_n = -1/10*(-1/5)^{n-1}$*

*Finalement $p_n = 1/2-1/10*(-1/5)^{n-1}$*

## Exercice n°4

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ définies par $X_1$ est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne, $X_2$ le temps entre la deuxième panne et la première panne, et $X_3$ le temps entre le troisième panne et la deuxième. Les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$

1) Quelle est la durée moyenne entre deux pannes consécutives ?
2) Soit E l'événement : « Chacune des 3 périodes de fonctionnement dure plus de deux heures », calculer P(E).
3) Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 périodes de fonctionnement sans interruption.
   a) $\forall t \in \mathbb{R}$, calculer $P(Y\leq t)$
   b) Déterminer une densité de Y
   c) Pour $a<0$, calculer $\int_0^{+\infty} te^{at}dt$
   d) Démontrer que Y possède une espérance.
   e) Calculer E(Y)

## Exercice n°5

X et Y désignent deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et q, et dont la covariance est nulle.

1) Montrer que $P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$
2) Montrer que X et Y sont indépendantes.

## Exercice n°6 (autocorrection)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \tau, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

1) Déterminer les réels $\alpha, \beta, \gamma$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$
2) Déterminer alors le réel a tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ définisse une loi de probabilité de X.
3) X admet-elle alors une espérance ? une variance ?
4) Si oui, les calculer…

*On obtient :* $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$

*On doit avoir* $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$*, d'où après télescopage : a=12*

*On a* $kP(X=k)\sim_{\infty} \frac{12}{k^2}$ *terme d'une somme de Riemann qui converge, donc admet une espérance.*

*On a* $k^2P(X=k)\sim_{\infty} \frac{12}{k}$ *terme d'une somme de Riemann qui diverge, donc n'a pas de variance.*

*On calcule* $E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{k+1} - \frac{12}{k+2}$ *et E(X)=6*

## Exercice n°7

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, P)$ de même loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0 ;1[$

Pour tout entier k non nul, on pose : $Y_k = X_k X_{k+1}$

1) a) Déterminer la loi de $Y_k$
   b) Déterminer $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$
   c) Les variables $Y_i$ et $Y_{i+1}$ sont-elles indépendantes ?
   d) Pour $i \neq j+1$, $j \neq i+1$ et i, $Y_i$ et $Y_j$ sont-elles indépendantes ?

2) Pour n entier naturel non nul, on pose $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

   a) Déterminer l'espérance et la variance de $Z_n$

   b) En déduire pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon)$

**Exercice n°8**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $q=1-p$

1) On définit la variable Z par Z=min(X,Y)
   a) Calculer pour un entier n non nul, $P(X \geq n)$
   b) Calculer alors $P(Z \geq n)$ puis $P(Z=n)$
   c) En déduire la loi suivie par Z
   d) Quelle est son espérance et sa variance
2) X et Z sont-elles indépendantes ?
3) Soit la variable aléatoire M définie par M=max(X,Y)
   a) Déterminer la loi de probabilité de M.
   b) M admet-elle une espérance ?

**Exercice n°9**

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y, sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, P)$, suivent la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $q=1-p$

1) Déterminer la loi de |X-Y|
2) Calculer si elle existe l'espérance de |X-Y|
3) On note T=max(X,Y) et U=min(X,Y)
   a) Exprimer T+U, T-U et TU en fonction de X et de Y.
   b) Calculer la covariance de (T,U)

**Exercice n°10 (autocorrection)**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$

Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{1+X}$

*On applique le théorème de transfert : E(Y)* $=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} P(X=k)$ *et E(Y)*$=e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

**Exercice n°11**

On suppose que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients entrant dans un salon de coiffure dans un certain intervalle de temps suit une loi de Poisson.

En moyenne, il entre n personnes en une heure.

1) Quelle est l'expression de la loi donnant la probabilité pour que k personnes entrent dans un intervalle de temps T ? (*on remarquera que pendant le temps T en heures, il entre en moyenne nT clients)*
2) Calculer la probabilité pour qu'il y ait un seul client au bout du temps T=$\frac{2}{n}$
3) Le salon de coiffure ne peut recevoir plus de 3 personnes par heure sans arriver à saturation. Quel est le pourcentage de clients qui devront revenir si le nombre moyen de personnes entrant est 2 ?

**Exercice n°12**

Soit n un entier naturel non nul, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique G($\frac{1}{n}$)

Montrer que P(X≥ $n^2$) $\leq \frac{1}{n}$ (*Penser à l'inégalité de Markov : P(X≥ $a$) $\leq \frac{E(X)}{a}$*)

**Exercice n°13 (auto-correction)**

1) Soit A un réel positif et f la fonction définie sur ℝ par : f(x) $= \frac{A}{1+x^2}$
   a) Déterminer la valeur de A pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X
   b) Soit Y = $e^X$, déterminer la densité de Y
2) Soit H la fonction définie sur ℝ par H(x) $= \frac{1}{1+e^{-x}}$, montrer que H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à préciser.

*On doit avoir* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2} dx = 1$ *d'où A = 1/π*

*Calculons P(Y≤ $t$) = P($e^X \leq t$) =P(X≤ $lnt$)= 1/π (arctan(ln(t)), il reste à dériver cette expression afin d'obtenir la densité : g(t) =*$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(lnt)^2}\frac{1}{t}$. *Il suffit de dériver H :*$\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

**Exercice n°14**

1) Montrer que l'intégrale J=$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx$ est une intégrale convergente dont on déterminera la valeur.
2) Soit A un réel positif, déterminer la valeur de A, pour que la fonction f définie sur ℝ par $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 1], f(x) = 0 \\ \forall x \in ]1, +\infty], f(x) = Ax^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \end{cases}$ soit une densité.

*On rappelle que :* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Exercice n°15**

A un QCM de 60 questions, un étudiant a l'habitude de faire 5% d'erreurs. En effectuant, une approximation que l'on justifiera, déterminer la probabilité qu'un jour donné, il effectue exactement 6 fautes. Même question avec cette fois-ci 12 fautes.

**Exercice n°16**

Au second tour d'un scrutin uninominal à deux tours, M. Legrand obtient 51% des suffrages contre 49% pour M. Legros. On suppose que les votes des différents électeurs sont indépendants.

1) On dépouille les 10000 premiers bulletins. Donner un majorant de l'erreur commise en affirmant que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.

2) En utilisant la loi des grands nombres, déterminer le nombre de bulletins qu'il suffit de dépouiller pour que l'on puisse affirmer avec moins de 5% d'erreurs que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.

3) Dans un bureau de vote donné, représentatif de l'ensemble des électeurs, il y a eu 817 suffrages exprimés. Quelle est la probabilité que M. Legrand y ait obtenu plus de suffrages que M. Legros. (*On pourra poser Z le nombre de suffrages exprimés en faveur de M. Legrand, et justifier l'approximation* $P(409 \leq Z \leq 817)$ *par une loi normale)*

**Exercice n°17**

Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et $Z_n$ est la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On approxime, ensuite, p par la proportion $\frac{Z_n}{n}$, on suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, donc il peut être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la loi de $Z_n$ ?
2) En déduire son espérance et sa variance.
3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P(|\frac{Z_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
4) En déduire une condition sur n pour que l'approximation proposée donne une valeur approchée de p à $10^{-2}$ près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%

**Exercice n°18**

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production d'un jour donné dépasse 75 pièces.

1) En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2) Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que la variance de la production quotidienne est 25 ?

**Exercice n°19**

Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louée ait un accident est égale à 0,2%. On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres. Chaque jour, 1000 voitures de la société sont en circulation. On note N le nombre de voitures accidentées.

1) Quelle est la loi de N?
2) Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'il y ait au moins 5 voitures accidentées dans la journée.

**Exercice n°20**

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ *et* $\mu$.

Soit n entier naturel, déterminer la loi conditionnelle de X sachant {X+Y=n}

**Exercice n°21**

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres $p_1,\dots,p_n$.

On souhaite montrer que $Y=\min(X_1,\dots,X_n)$ suit aussi une loi géométrique.

1) Déterminer P(Y≥k)
2) En déduire P(Y=k)
3) Conclure.

**Exercice n°22**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [-1 ; $\frac{2}{3}$], déterminer la loi de $X^2$

**Exercice n°23**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]

1) Déterminer la loi de Y=tan (X) (appelée loi de Gauss)
2) Déterminer une densité pour Y.
3) Y admet-elle une espérance ?

**Exercice n°24**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=a$e^{-|x|}$

1) Déterminer a pour que f soit une densité.
2) Montrer que la variable aléatoire X de densité f admet des moments à tout ordre et que : $\forall k \geq 1, E\left(X^k\right) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$

**Exercice n°25**

Une variable aléatoire suit une loi normale N(0,1). Pour t>0, on définit R(t)=P(X<t)

1) Montrer que P(-t≤ $X \leq t$) = 2R(t)-1
2) En déduire que pour tout $\alpha$ de ]0,1[ : P($-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha$)=1- $\alpha \Leftrightarrow R(u_\alpha) = 1$-$\frac{\alpha}{2}$

**Exercice n°26**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n=40 et p=0,4

1) Calculer P(X=16) et P(13≤X≤15)
2) On approche X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de paramètres N(16 ;9,6)
   a) Justifier cette approximation
   b) Calculer P(Y=16) et P(13≤Y≤15). Conclusion ?
3) Calculer P(12,5≤Y≤15,5), quelle conclusion peut-on en tirer ? pourquoi parle-t-on de correction de continuité ?

**Exercice n°27**

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre n>300 de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%.
On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et $S_n$ le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

1) Donner la loi de $S_n$,
2) Déterminer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaitre la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 0,99$. En utilisant le théorème limite central (ou théorème de De Moivre-Laplace), proposez une solution approchée de ce problème. On pourra s'aider d'une table de la loi normale.

## Exercice n°28

Le but de l'exercice est de démontrer que : $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$

Soit une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)$ suivant toutes une loi de Poisson P(1) :

1) Démontrer que : $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson(n)
2) A l'aide du théorème central limite, donner $\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0)$
3) Démontrer que : $P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$
4) Conclure.

## Exercice n°29 (Edhec)

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$.
On admet que $F$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. .
On dit alors que cette v.a.r. suit la *loi logistique*.
On considère $Z$ une v.a.r. suivant la loi logistique.

*1.* Déterminer une densité de probabilité de $Z$, notée $f$.
*2.* Étudier la parité de $f$ puis en déduire que $Z$ admet une espérance et la déterminer.
*3.* Soit $U$ une v.a.r. de lui uniforme sur $]0,1[$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

## Exercice n°30 (Edhec)

.Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.
On considère la v.a.r. : $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

*1.* Déterminer la loi de $V$, son espérance et sa variance.
*2.* Déterminer une densité de $W = V^2$ et de $Z = \dfrac{1}{V}$.

## Exercice n°31 (Essec)

Soit $X$ une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

## Exercice n°32

La loi conjointe du couple $(X,Y)$ est donnée par :

| $x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| 1 | $\frac{17}{60}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

**a.** Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple puis déterminer les loi marginales.

**b.** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**c.** Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

## Exercice n°33 (Edhec)

Une urne contient $N-2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

**1.** Soit $X_1$ le rang d'apparition de la boule blanche, $X_2$ le rang d'apparition de la boule rouge.

**a)** Déterminer la loi de $X_1$, la loi de $X_2$, la loi du couple $(X_1, X_2)$.

**b)** Les variables $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

**2.** Soit $X$ le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit $Y$ le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge.

**a)** Déterminer la loi de $X$ et la loi de $Y$.

**b)** Calculer les espérances de $X$ et de $Y$.

## Exercice n°34 (Audencia)

On considère trois v.a.r. $U$, $V$, et $W$, indépendantes et telles que $U$ et $W$ suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $V$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.
On note $X = U + V$ et $Y = V + W$.

**1.** Rappeler les lois de $X$ et de $Y$.

**2. a)** Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe et la calculer

**b)** En déduire le coefficient de corrélation linéaire de $X$ et $Y$.