Feuille d'exercices sur EVN

## Exercice n°1 (oraux concours)

**Exercice 12** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $S = S(0_E, 1)$.

1. Montrer que $x \in S \mapsto \|u(x)\| \in \mathbb{R}$ admet un maximum noté $\|u\| = \max\limits_{x \in S} \|u(x)\|$.
2. Montrer que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$.
3. Montrer que $\forall \lambda \in Sp(u)$, $|\lambda| \leq \|u\|$.
4. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \|u\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
5. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

## Exercice n°2

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et f :K→K telle que : $\forall (x,y) \epsilon K^2, x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. On veut montrer que f possède un unique point dans K

1) Soit $\varphi : x \to \|f(x) - x\|$, montrer que $\varphi$ est continue sur K
2) Démontrer que $\varphi$ admet et atteint sa borne inférieure en x=a
3) On suppose que f(a) $\neq$ a
   a) En posant b=f(a), montrer que $\|f(b) - b\| < \|f(a) - a\|$
   b) Conclure

## Exercice n°3 (écrits concours)

On considère l'espace vectoriel E=$\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne/

Soit A = {(x,y)$\in E, 0 \leq x \leq 1$ $et$ $y = 0\}$

Soit B = {(x,y)$\in E, \|(x,y)\| < 1$ $et$ $(x,y) \notin A\}$

1) Montrer que A est fermée
2) Montrer que B est ouverte
3) Montrer que l'intérieur de A, $\dot{A}$, est vide
4) Montrer que $\bar{B}$ contient $B_0$((0,0),1)
5) A-t-on toujours $\overline{M} = \overline{\dot{M}}$ ? $\dot{M} = \dot{\overline{M}}$

## Exercice n°4

Soit A=$(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(K)$
2) Démontrer que pour tout A de $\mathcal{M}_n(K)$, $\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \leq \sqrt{n} \|A\|$
   (ind. Introduire le produit scalaire : (A,B)=tr($^t$AB))

## Exercice n°5

**Les deux questions sont indépendantes :**

1) Soient $E$ un espace vectoriel normé et $A$ une partie non vide de $E$.
   Pour $x \in E$, on pose
   $$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| \,/ a \in A\}$$
   Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est définie et continue sur $E$.

2) Soit E un evn et F un sev de E d'intérieur non vide. Montrer que F= E

**Exercice n°6 :**

Montrer que l'application : N : P→ $sup_{t\in[0,1]}|P(t)-P'(t)|$ est une norme sur K[X]

**Exercice n°7 (oraux concours)**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors $f$ est la fonction nulle.

**Exercice n°8**

Les deux questions sont indépendantes :

1) Montrer que C = {(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, *tels que* $x^2+y^2=1$} est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
2) Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E, montrer que l'adhérence de A est fermée.

**Exercice n°9**

Soit E un evn, et F un sous-espace vectoriel de E, montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.

**Exercice n°10**

Soit E et F deux K-espaces vectoriels. On suppose qu'on dispose d'une norme ‖ ‖ sur E.

On suppose qu'on dispose également d'une application linéaire injective u :F→E.

Montrer que : N :F→ $\mathbb{R}^+$, x→ $\|u(x)\|$ est une norme sur F.

**Exercice n°11 :** Montrer que pour x de $K^n$, on a : $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

**Exercice n°12 (oraux concours)**

**EXERCICE 37 analyse**

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que $N_\infty$ et $N_1$ sont deux normes sur $E$.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \le kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_1$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.
2. Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

**Exercice n°13 (oraux concours)**

Soit $E$ un espace vectoriel normé. On considère deux sous-ensembles $A$ et $B$ de $E$ puis :
$d(A,B) = \inf\{d(a,b), (a,b) \in A \times B\} = \inf\{\|a-b\|, (a,b) \in A \times B\}$.
Montrer que $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A,B)$.

**Exercice n°14 (oraux concours)**

**EXERCICE 34 analyse**

Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à $A$, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
4. Démontrer que si $A$ est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

**Exercice n°15**

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et f : $\mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose que pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, f(2x) = 2f(x). Montrer que f est linéaire

**Exercice n°16**

0) Entendu dans une cours de récré : « De toute façon, toute application lipschitzienne est uniformément continue ! ». Que faut-il en penser ?
1) Soit E=C([0,1],$\mathbb{R}$) muni de la norme $\| \ \|_\infty$, soit $\varphi: E \to \mathbb{R}$, f→ $inf_{t\in[0,1]} f(t)$
   Montrer que $\varphi$ est uniformément continue.
   Ind. On pourra montrer que $\varphi$ est 1-lip

**Exercice n°17**

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe c>0 tel que N(AB)≤cN(A)N(B)

**Exercice n°18**

Soit un entier naturel n, montrer qu'il existe $\lambda > 0$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 |P(t)|dt \geq \lambda sup_{t\in[0,1]}|P(t)|$

**Exercice n°19**

1) Montrer que l'application N : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1; x_2) \ \to sup_{t\in[0,1]}|x_1 + tx_2|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
2) Représenter la boule unité fermée pour cette norme.

**Exercice n°20***

On suppose que E et F sont deux $\mathbb{R}$ -evn

Soit : f : E→F, $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en $0_E$ alors f est linéaire.

**Exercice n°21***

Soit E=C([0,1], $\mathbb{C}$ ) avec la norme $\|f\|_\infty = sup_{[0,1]}|f(t)|$

Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

*Ind. Soit $f_n(t)=e^{2in\pi t}$, montrer que $f_n$ n'admet aucune sous-suite qui converge.*

**Exercice n°22**

Montrer que la fonction x→ $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

(on distinguera par exemple sur l'intervalle [0,2] puis sur [1,+∞[)

**Exercice n°23 (écrit concours)**

On considère un espace vectoriel normé $E$, de dimension finie, et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. On définit la suite $(v_n)_n$, appelée moyenne de Cesàro de $(u_n)_n$, par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$.

**1°)** Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers une limite $L$ implique la convergence de la suite $(v_n)_n$ vers la même limite.

**2°)** La réciproque est-elle exacte ?

*(ind. Penser à* $(-1)^n$)

**Exercice n°24**

Soient E un espace vectoriel normé et T : E→E définie par : T(u)=$\begin{cases} u \ si \ \|u\| \leq 1 \\ \frac{u}{\|u\|} \ sinon \end{cases}$

Montrer que T est au moins 2-lipschitzienne

*(Ind. On distinguera les cas et on remarquera que pour* $\|u\|$*>1 et* $\|v\|$*>1,* $\|v\|u - \|u\|v = \|v\|(u-v) + (\|v\| - \|u\|)v$)

**Exercice n°25**

Montrer que $N_1$ et $N_2$ normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, $Id_E$ est bicontinue de (E, $N_1$) vers (E, $N_2$).

(Ind. On se souviendra que : Id est une application linéaire…)

**Exercice n°26**

Soit f∈ $L_c(E,F)$, on définit $|||f|||$ par $|||f|||= sup_{\|x\|_E \leq 1}\|f(x)\|_F$

Montrer que $|||f|||= sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|_F = sup_{x\in E^*}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$

**Exercice n°27**

Pour n≥ 2, montrer que $\| \ \ \|_1$ et $\| \ \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ ne sont pas issues d'un produit scalaire.

*(Ind. On supposera que la norme est issue d'un produit scalaire φ, on utilisera l'identité de polaritation, et pour des vecteurs d'une bon $e_1$ et $e_2$, on montrera que φ ($e_1$,$e_2$)*$\neq 0$*)*

**Exercice n°28**

Voici un exercice proposé par ChatGPT

**Exercice :**

Soit $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Calculez la norme d'opérateur de $T$.

1) Critiquer l'énoncé et le corriger
2) Répondre à la question (penser à une fonction constante)

**Exercice n°29**

Soit E=C([0,1], ℝ) muni de $\|\ldots\|_\infty$, et soit $\varphi: f \to \int_0^1 tf(t)dt$

1) Justifier que pour $f \in$ C([0,1], ℝ), $\|f\|_\infty$ est bien définie.
2) Justifier que $\varphi$ est bien une forme linéaire.
3) Calculer la norme de $\varphi$

**Exercice n°30**

Soit E=$C^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \quad \|_\infty$

Soit l'application u : f → u(f) où u(f)(x) = f(0) + x(f(1) − f(0))

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.
2) Montrer que u est continue.
3) Montrer que $|||u||| = 1$ (ind. On pourra considérer l'application f constante)

**Exercice n°31**

Soit E un evn, on considère un compact X et un fermé Y de E, montrer que X+Y est fermé.

**Exercice n°32(oraux de concours)**

Le but de l'exercice est de démontrer que l'ensemble D des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Soit A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non diagonalisable avec (b,d)≠(0,0), on construit $A_n = \begin{pmatrix} a & b+\frac{1}{n} \\ c & d \end{pmatrix}$

1) Justifier que le polynôme caractéristique de A ait une racine double.
2) Justifier que le polynôme caractéristique de $A_n$ ait deux racines quelconques.
3) Démontrer que $\|A - A_n\|_\infty \to 0$. Conclure !

**Exercice n°33**

Soit T :ℝ[X]→ ℝ[X] défini par T(P) = P'

Etudier la continuité de T lorsque ℝ[X] est muni de la norme :

1) $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$

2) $N_2(P) = sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$

**Exercice n°34**

Soit $E = C^\infty([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'opérateur de dérivation D :E→E, f→f '

Montrer que quelle soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E,N) dans (E,N)

Ind. Penser à étudier la suite de fonction $f_n(x) = e^{nx}$

**Exercice n°35**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie ($\sup|a_k|$)

Soit T : $(E, \|\ \ \|_\infty) \to (E, \|\ \ \|_\infty)$ définie par T(P)=XP

Démontrer que T est continue et calculer sa norme.

**Exercice n°36**

Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $N(A)=sup_{i=1\dots n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$

1) Montrer que l'application trace : E→ $\mathbb{R}$ est continue
2) Calculer sa norme (on pensera à l'identité…)

**Exercice n°37**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées ($u_n$) muni de $\|u\|_\infty = sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$

On définit : T : $(E, \|u\|_\infty) \to (E, \|u\|_\infty)$ par Tu = v où $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$

1) Justifier que T est continue
2) Calculer sa norme (penser à la suite constante égale à 1)

**Exercice n°38 : Espace $l^p(\mathbb{N})$**

Soit la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$, à quelle condition $(x_n)\in l^1(\mathbb{N})$, $\in l^2(\mathbb{N})$ ?

**Exercice n°39 : Espace $l^p(\mathbb{N})$**

Soit $1\leq p \leq q \leq +\infty$, montrer que : $l^p \subset l^q$ *est fausse*, et que si : $x\in l^p$ alors $x\in l^q$

**Exercice n°40 : Espace $l^p(\mathbb{N})$**

Soit 1<p<+∞ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Soient $(x_n) \in l^p$ et $(y_n) \in l^q$, montrer que $\sum_{n\geq 0} x_n y_n < +\infty$ et que $\sum_{n\geq 0} x_n y_n \leq \|x_n\|_p \|y_n\|_q$

Ind . Penser à l'inégalité de Holder.

**Exercice n°41** (écrits concours)

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, de norme notée $\|.\|$, associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On considère trois vecteurs $(x,a,b) \in E^3$ tels que $a \neq b$ et $\|x-a\| = \|x-b\|$. Montrer que $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x-a\|$.

**Exercice n°42 (écrits concours)**

Soient $E$ un espace vectoriel normé et $A$ une partie de $E$.

**1°)** Montrer que : $A$ fermé $\iff \mathrm{fr}(A) \subset A$.

**2°)** Montrer que : $A$ ouvert $\iff A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$.

*Ind. Pour le 2) Fr(E\A)=Fr(A)*

**Bonus :**

**Exercice n°44 :** Dans $(\mathbb{R}, |\ \ |)$, déterminer $\overline{\mathbb{Q}}$, $\dot{\mathbb{Q}}$ $et$ $Fr(\mathbb{Q})$

**Exercice n°45 :** Soit $\varphi : K[X] \to K, P \to P(1)$, montrer que $\varphi$ est une application non continue de $(K[X], \|\ \ \|_\infty)$

**Exercice n°46** : Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On souhaite montrer que f$\in L(E,F)$ est continue ssi A={x∈E, $\|f(x)\|_F = 1$} est un fermé de E

1) On suppose f$\in L(E,F)$ continue, montrer que : {x∈E, $\|f(x)\|_F = 1$} est un fermé de E
2) Réciproquement.
   a) Si f n'est pas continue, construire une suite $b_n$ telle que $\|b_n\|_E \leq 1$ $et$ $\|f(b_n)\|_F > n$
   b) Montrer que pour tout n, $\frac{b_n}{\|f(b_n)\|} \in A$
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{\|f(b_n)\|} \notin A$
   d) Conclure !