Feuille d'exercices sur endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice n°0

Rappel :

Si l'espace est muni d'un repère orthonormé direct, et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

alors les coordonnées de leur produit vectoriel est

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Soit : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, déterminer $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Exercice n°1

1) Toute matrice carrée réelle de déterminant 1 est orthogonale ?
2) Un endomorphisme orthogonal est bijectif ?
3) Un endomorphisme est symétrique ssi sa matrice est symétrique ?

Exercice n°2

Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices relativement à la base canonique sont respectivement :

$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n°3

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-3z = 0$. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice n°4

Montrer que l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$, canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace que l'on déterminera.

Exercice n°5 (oraux concours)

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice n°6 (oraux concours)

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall x, y \in E, (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

a) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.
b) Etablir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

c) Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

Exercice n°7 : Soit A$\in S_n(\mathbb{R})^{++}$

1) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $S_n(\mathbb{R})^{++}$ telle que B^2=A
2) a) On note λ_1, …, λ_p les valeurs propres distinctes de A, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à p-1 tel que : $\forall i \in [\![1, p]\!], P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$
   b) Exprimer ce polynôme P en fonction des λ_i
3) En déduire l'expression de B.

Exercice n°8 (oraux concours)

Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

a) Montrer que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

b) Etablir que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Exercice n°9

Soit q : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2$.

1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique.
2) En déduire le noyau de q

Exercice n°10

Soit $\varphi:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to \mathbb{R}$, $(A,B)\mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Vérifier que φ est une application bilinéaire. Quelle est sa matrice dans la "base canonique" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice n°11

On définit l'application q sur $(\mathbb{R}_2[X])^2$ par :$\forall P\in\mathbb{R}_2[X]$, $q(P)=P'(1)^2-P'(0)^2$.

1) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire φ associée ainsi que sa matrice dans la base canonique.
2) Déterminer le noyau de q correspondant au noyau de φ
3) Déterminer le cône isotrope de q, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs u tels que q(u)=0.
4) La forme quadratique q est-elle définie ? Positive ou négative?

Exercice n°12

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^3 = B^3$, prouver que A=B

Exercice n°13

Soit n un entier non nul, et A∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S∈ $S_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $A^T SA \in S_n(\mathbb{R})$ (on précise que A^T désigne la transposée de A)
2) Montrer que : S∈ $S_n(\mathbb{R})^+ \Longrightarrow A^T SA \in S_n(\mathbb{R})^+$
3) Montrer que si S∈ $S_n(\mathbb{R})^{++}$ *et* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^T SA \in S_n(\mathbb{R})^{++}$

Exercice n°14

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

1) Montrer que $A^T A \in S_p(\mathbb{R})^+$
2) Montrer que : $A^T A \in S_p(\mathbb{R})^{++} \Leftrightarrow rg(A) = p$

Exercice n°15

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, et q la forme quadratique associée.

Soit B une base de E, et A=$M_B(\varphi)$

1) Si q est positive, montrer que det(A)≥0
2) Si q est définie et positive, montrer que det(A)>0

Exercice n°16 : Soit n un entier non nul

1) Montrer que $S_n(\mathbb{R})^{++}$=$S_n(\mathbb{R})^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$
2) En déduire que $S_n(\mathbb{R})^{++}$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})^+$

Exercice n°17

Soit E un espace euclidien, on note ||… || la norme associée au produit scalaire.

1) Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est un endomorphisme symétrique de E.
2) Soient p et r deux projecteurs orthogonaux de E, soit λ une valeur propre non nulle de por et u un vecteur propre associé.
   a) Montrer que u est élément de Imp
   b) Montrer que r(u)- λu est élément de $Imp^\perp$
   c) Etablir l'égalité : $\lambda\|u\|^2$=$\|r(u)\|^2$
   d) En déduire que toutes les valeurs propres de por sont dans [0,1]

Exercice n°18 : On considère la matrice A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1) Pourquoi A est diagonalisable ?
2) Montrer que les valeurs propres de A sont 4 et -5
3) On note U la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec (x,y,z)∈ $\mathbb{R}^3$, calculer $U^T AU$
4) On considère : Σ={(x,y,z)∈ $\mathbb{R}^3$, $3x^2+4xy+8yz-4xz=\frac{1}{8}$}

   Montrer qu'il existe une bon (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle Σ admet une équation : $4X^2+4Y^2-5Z^2=\frac{1}{8}$

Exercice n°19

Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E vérifiant :

$\forall(x,y) \in E^2, (f(x),y) = -(x,f(y))$

1) Montrer que pour tout x de E, x et f(x) sont orthogonaux
2) Montrer que s=fof est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice n° 20 **(oraux de concours)**

Soit E un espace euclidien.

1. Que peut-on dire des valeurs propres d'une isométrie $f \in O(E)$? *Indication : on pourra considérer la matrice de f dans une base orthonormée et utiliser le résultat sur le déterminant d'un produit.*
2. Quelles sont les isométries $f \in O(E)$ qui sont diagonalisables ?

Exercice n°21 (oraux de concours)

Soit A une matrice symétrique

On note $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

1. Justifier qu'on a $Tr(A^2) = \langle A, A\rangle$ pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'on a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice n°22(oraux de concours)

On se place dans un espace euclidien E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

Montrer que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice n°23 (oraux de concours)

On se place dans un espace euclidien E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

Montrer que $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} |\lambda|$.

Exercice n°24

1) On appelle que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par (A,B) = tr(^tAB)
   On fixe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que f : M→^{t}AMA est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2) On admet que (P,Q)=$\int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}$[X]
   Montrer que u : P→2XP'+(X^2-1)P'' est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}$[X]

Exercice n°25

On cherche à démontrer que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz \geq 0$

1) Déterminer une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), avec\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $^tXAX=q(x,y,z)$
2) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que : $A=PD\,^tP$
3) On pose X=PX', où X' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, calculer q(x,y,z) en fonction de x',y' et z'
4) Conclure !

Exercice n°26

Soit E un espace euclidien, u un vecteur non nul de E, on appelle s la réflexion par rapport à vect(u)$^\perp$

1) Justifier que pour tout x de E, on a : s(x) = x-2$\frac{(x,u)}{\|u\|^2}u$
2) On se place à présent dans $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion s par rapport à F={(x_1,…,x_n) $\in \mathbb{R}^n$, x_1+…+x_n =0}