Feuille d'exercices sur « les complexes » (1)

Exercice n°0

1) Ecrire le tableau avec les valeurs dites remarquables des cosinus, et sinus.
2) Soit z=$-3e^{i\frac{\pi}{3}}$, donner son module et un argument
3) Ecrire z=1-i sous forme trigonométrique puis complexe.
4) Ecrire z=$\frac{1}{3-i}$ sans complexe au dénominateur.
5) Dans le plan, on donne M(3,-4), donner l'affixe correspondant au point M.
6) Soit z=$e^{i\frac{\pi}{3}}$, calculer de deux façons différentes, $1+z+z^2$
7) Exprimer pour tout réel θ, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

Exercice n°1

Pour z$\in \mathbb{C}^*$, établir que $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$ ou z$\in \mathbb{R}^*$

Exercice n°2 (oraux concours)

Exercice 12 (★★). z et z' étant deux complexes non nuls et de même module, montrer que $U = \frac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.

Exercice n°3

Soit $\theta \in [0,\pi]$, et z=$1+\cos\theta + i\sin\theta$, donner la forme exponentielle de z.

Exercice n°4

Résoudre l'équation : $iz^2+(3+i)z+2-2i = 0$

Exercice n°5(oraux concours)

Exercice 8 (★★). Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z-1| = |z-i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice n°6

Soit $(z_1,z_2)\in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$, on pose $Z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

1) Montrer que Z est réel.
2) Evaluer Z en fonction des arguments de z_1,z_2

Exercice n°7

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1+i$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z + e^{-z} = 2i$
3) Résoudre l'équation $e^z = a$ (avec a$\in \mathbb{C}$)

Exercice n°8

Déterminer les racines carrées de $1-i\sqrt{3}$

Exercice n°9

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $6z^2-(5-i)z+2-\frac{5i}{6}=0$
2) $z^3+(1-i)z^2-z+1-3i=0$ après avoir démontré qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Exercice n°10

Résoudre l'équation $z^2-(1+a+a^2)z+a+a^3=0$ où a désigne un complexe.

Exercice n°11

Soit z un complexe, déterminer z pour que les points d'affixe z,z^2 et z^3 :

1) Soient alignés
2) Forment un triangle rectangle
3) Forment un triangle rectangle isocèle.

Exercice n°12

Montrer que trois points A,B et C d'abscisses respectives a,b et c forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

Exercice n°13

Soit $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}, z\to z+\frac{1}{z}$

1) Est-ce que $f(z)=f(z')\Longrightarrow z=z'$?
2) Est-ce que $\forall z'\in\mathbb{C}, \exists ? z\in\mathbb{C}^*, z'=f(z)$

Exercice n°14

Soit a,b,c trois nombres complexes de module 1, montrer que $|ab+bc+ac|=|a+b+c|$

Exercice n°15

Soit $z\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, soit $\theta=\arg(z)$, montrer que $\tan(\frac{\theta}{2})=\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}$

Exercice n°16(oraux concours)

Exercice 9 (★). Soit $n\geqslant 2$, $p\in\mathbb{Z}$ et $\omega\in\mathbb{C}$ tel que $\omega^n=1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k$

Exercice n°17

1) Déterminer les racines carrées, sous forme algébrique, de z=1+i
2) En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice n°18

Soit A,B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a,b et c.

Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC a pour affixe a+b+c