Feuille d’exercices sur le chapitre 4

Exercice n°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x^2-1) + \ln 4 = \ln(4x-1)$
2) $\ln|x-1| + \ln|x+2| = \ln|4x^2+3x-7|$
3) $2^{x^2} = 3^{x^3}$

Exercice n°2

1) Soit f de E dans F bijective, montrer que f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
2) Si f de E dans F et g de F dans E sont bijectives, montrer que gof est bijective

   et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

Exercice n°3

Calculer lorsqu’elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ *b*) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ *c*) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *e*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ *f*) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

Exercice n°4

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$

Exercice n°5

1) Par intégrations par parties, donner les primitives des fonctions suivantes, on justifiera l’existence au préalable des primitives, et l’IPP sera soigneusement justifiée.
   $x \to \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$
   $x \to \text{Arcsin}\, x$ sur $]-1\,;1[$
2) Même question pour $x \to x^2e^x$ (on procèdera à une double IPP)

Exercice n°6

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x)+1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

Exercice n°7

Pour x>0, on pose f(x) $= \frac{e^x}{e^x-1}$

1) Montrer que f réalise une bijection de]0 ;+∞[dans un intervalle à préciser.
2) Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice n°8

Soit f :]-1 ;1[→ ℝ, x→ ln $(\frac{1+x}{1-x})$, étudier la dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice n°9

Soit la fonction f :]0 ;+∞[→ ℝ, x→ x^x

1) Etudier les limites de f en 0 et ++∞
2) Etudier les variations de f.
3) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
4) On souhaite prolonger f par continuité, quelle valeur donner à f(0) ?
5) Vérifier que f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice n°10

On définit la fonction f par f(x) = Arctan(tanx)

1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Vérifier que f est périodique, que peut-on en déduire pour son graphe ?
3) Vérifier que son graphe admet 0 comme centre de symétrie.
4) Représenter graphiquement f.

Exercice n°11

Soit x un réel quelconque.

1) Simplifier $\cos^2$(Arctan x)
2) En déduire que cos(Arctan x) $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et que sin(Arctan x) $= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice n°12

Calculer la dérivée de : x→Arctan x + Arctan $\frac{1}{x}$, en déduire la simplification de cette expression.

Exercice n°13

Pour x∈[-1 ;1], simplifier sin(Arcos x)

Exercice n°14

Soit la fonction f définie par f(x) = Arcsin(sin x) (au fait, est-ce la même définition que sin(Arcsin(x)) ?)

1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe ?
3) Démontrer que l'on peut réduire l'étude de f à [0 ;π]
4) Vérifier que la droite d'équation x $= \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie pour le graphe de f.

Exercice n°15

Simplifier : $f(x) = \text{Arcos}(\frac{1-x^2}{1+x^2})$

Exercice n°16

1) Etablir que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a $\sin x \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
2) Développer cos(3a)
3) Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ en remarquant que : $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$
4) Simplifier : $\frac{cosp-cosq}{sinp+sinq}$
5) Simplifier les expressions suivantes : a) cos(2arccos x) b) cos(2arcsin x)

Exercice n°17

Simplifier la fonction $x \rightarrow \text{Arccos}(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice n°18

Montrer que la courbe représentative de la fonction Arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, \pi/2)$.

Exercice n°19

Etudier les limites à droite et à gauche en 0 de :

1) $x \rightarrow E(\frac{1}{x})$
2) $x \rightarrow xE(\frac{1}{x})$
3) $x \rightarrow x^2E(\frac{1}{x})$

Exercice n°20

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1) $|x+4| = 5$
2) $|2x-3|>|3-x|$
3) $|2x-4| = |x+3|$
4) $|x+1| + |x-3|\leq 6$

Exercice n°21

Résoudre dans $\mathbb{R}$, Arcosx = Arcsin(2x)

Exercice n°22

On pose $f(x) = Arcsin(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

1) Déterminer le domaine de définition D de *f*.
2) Montrer que *f* est dérivable sur D, calculer sa dérivée
3) En déduire une expression simple de *f*.