Feuille d'exercices sur « **les nombres complexes** » (2)

Exercice n°1

Linéariser $\sin^4 x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice n°2

Calculer les racines quatrièmes de 28-96i

Exercice n°3

Soit α *et* β deux réels, mettre sous forme algébrique A $= (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{50}$ et B $= \frac{1+cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\beta+isin\beta}$

Exercice n°4

Soit n un entier non nul :

1) Déterminer le module et un argument de $(1+i)^n$
2) En déduire S $= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}(-1)^k\binom{n}{2k}$
3) Et : S'$= \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

Exercice n°5

Soit n un entier non nul, et ξ_0; $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité

1) Calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k{}^p$ pour p entier naturel non nul.
2) Montrer que $\sum_{0\leq k,l\leq n-1 \text{ et } k\neq l} \xi_k\xi_l = 0$ si $n \geq 3$

Exercice n°6

1) Pour n entier et $x \in \mathbb{R}$, simplifier : $A_n = \sum_{k=0}^{n} cos^2(kx)$
2) Pour n entier et $x \in \mathbb{R}$, et $x \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, simplifier : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{cos^k x}$

Exercice n°7

Soit n un entier non nul, calculer le produit des racines n-ièmes de 1.

Exercice n°8

Pour n entier naturel, résoudre l'équation $z^{2n+1}+1=0$

Exercice n°9

1) Résoudre de deux façons l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$
2) En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{5}$

Exercice n°10

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer cos(5x) en fonction de cos(x)
2) En déduire une expression de $\cos\frac{\pi}{10}$

Exercice n°11

Soit n un entier non nul, résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $(z+1)^n = (z-1)^n$
2) $(z+1)^n = (1-z)^n$

Exercice n°12

Soit n$\in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

1) Montrer que : $\cos(n\,\theta) = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p \binom{n}{2p} cos^{n-2p}(\theta) sin^{2p}(\theta)$

   Et : $\sin(n\,\theta)\ \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p \binom{n}{2p+1} cos^{n-2p-1}(\theta) sin^{2p+1}(\theta)$
2) On suppose : $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, et n$\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, en déduire une expression de $\tan(n\,\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ et n.

Exercice n°13

Soit n un entier supérieur ou égal à2, on w_0 ,…,w_{n-1} les racines n-ièmes de l'unité.

1) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$
2) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
3) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w_k - 1|^2$ en fonction de n