Feuille d'exercices sur « équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants »

Exercice n°1

1) a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'+2y=-4$
   b) Déterminer celle(s) vérifiant $y(1)=-3$

2) a) Déterminer les solutions de $2y'-3y=9$
   b) Déterminer celle(s) vérifiant $y'(1) = 1$

3) De façon générale, l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec a constante et b fonction continue sur $\mathbb{R}$, a combien de solutions vérifiant la condition fixée : $y(x_0) = y_0$

Exercice n°2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y'+2y=2x^3-5x^2+4x-1$
2. $y'+2y=x^2-2x+3$
3. $y'+y=xe^{-x}$
4. $y'-2y=\cos(x)+2\sin(x)$

Exercice n°3

Résoudre l'équation différentielle $y'+2y = 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ de deux façons différentes

Exercice n°4 (autocorrection)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $2y' - y = \cos(2x)$
2) $-y'+4y = 3e^{2x} + xe^{-x}$
3) $y' = 2y + (2x^2-1)e^{x^2}$

On obtient :

1) $y=\frac{-1}{17}\cos(2x) + \frac{4}{17}\sin(2x) + Ae^{2x}$, $A\in \mathbb{R}$
2) $y=(\frac{1}{5}x + \frac{1}{10})e^{-x} + \frac{3}{2}e^{2x} + Ae^{4x}$, $A\in \mathbb{R}$
3) $y=(x+1)e^{x^2} + Ae^{2x}$, $A\in \mathbb{R}$

Exercice n°5

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle?

Exercice n°6

La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton : $\theta'(t)=\lambda(\theta_a-\theta(t))$, où θ_a est la température ambiante, λ est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales et t est le temps, donné en minutes.

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle en fonction des paramètres λ et θ_a

2) Un verre d'eau, à 10°C, est sorti du réfrigérateur et déposé sur une table dans une pièce où il fait 31°C. Après 10 minutes, l'eau dans le verre est à 17°C.
Quel est le temps écoulé après la sortie du réfrigérateur pour que l'eau soit à 25°C ?

Exercice n°7

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout x∈ $\mathbb{R}$, $f'(x)f(-x)=1$ et $f(0)=-4$

Indication : On posera g(x) = f(x)f(-x)

Exercices n°8 : Les équations de la physique…

1) Echange thermique , Résoudre: $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$
2) Charge/décharge d'un condensateur à travers une résistance :Résoudre : $U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$
3) Chute libre d'un corps : Résoudre : $m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$
4) Réaction chimique :Résoudre : $\frac{dC}{dt} = -kC$

Exercice n°9

Résoudre : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$

On bascule en complexes : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$

a) Résoudre l'équation homogène associée
b) Déterminer une solution particulière de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$
c) En déduire les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$
d) Déterminer les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$

Exercice n°10

1) Résoudre l'équation différentielle $xy'+xy = x^3$ sur $]0 ;+\infty[$
2) Résoudre l'équation différentielle $xy'+xy = x^3$ sur $]-\infty ;0[$
3) Peut-on résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$?

1) On a : $y=x^2-2x+2+ Ae^{-x}$, A∈ $\mathbb{R}$
2) On a : $y = x^2-2x+2+ Be^{-x}$, B∈ $\mathbb{R}$
3) Oui, $y= x^2-2x+2+ Ae^{-x}$, A∈ $\mathbb{R}$